

Uniformisierung log-abelscher Varietäten

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat. der Fakultät
für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm.



Vorgelegt von Volker Pahnke aus Solingen, 2005.

Dekan: Prof. Dr. Ulrich Stadtmüller

Erster Gutachter: Prof. Dr. Werner Lütkebohmert

Zweiter Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Jochen Koenigsmann

Dritter Gutachter: Prof. Dr. Stefan Schröer

Tag der Promotion: 29. April 2005

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	3
1	Geometrie der Monoide	9
1.1	Kommutative Monoide	9
1.2	Katos Fächer	11
1.3	Polyederkegelkomplexe	13
1.4	Gruppoide von Fächern	15
2	Logarithmische Geometrie	23
2.1	Log-Strukturen von Fontaine-Illusie	23
2.2	Kohärente Log-Strukturen	26
2.3	Kombinatorik kohärenter Log-Strukturen	29
2.4	Selbstüberschneidung	39
2.5	Log-Modifikationen	44
3	Log-Glattheit	51
3.1	Allgemeine Fakten	51
3.2	Log-Glattheit und toroidale Einbettungen	54
3.3	Log-Glattheit und Saturiertheit	60
3.4	Semi-Stabilität	68
3.5	Kohomologie vertikaler log-glatter Varietäten	71
4	Valuative Log-Räume	76
4.1	Bewertungstheorie der Monoide	76
4.2	Katos valuative Log-Schemata	78
4.3	Die Kategorie der fs valuativen Log-Schemata	81
5	Log-Gruppen	87

5.1	Allgemeine Fakten	87
5.2	Algebraische Log-Tori	89
5.3	Log-semiabelsche Schemata	96
5.4	Toroidale log-semiabelsche Schemata	101
5.5	Linearisierung valuativer Log-Schemata	109
5.6	Uniformisierung log-abelscher Varietäten	116
5.7	Polarisierungen log-abelscher Varietäten	121
5.8	Zusammenhang mit der Faltings-Chai Kompaktifizierung von \mathbf{A}_g	127
A	Étale Gruppoide und Topoi	130
B	Alexeevs stabil-semiabelische Varietäten	135
	Literaturverzeichnis	143
	Stichwortverzeichnis	146

Kapitel 0

Einführung

Die Theorie der toroidalen Einbettungen wurde von Mumford entwickelt, um die Degeneration höherdimensionaler glatter Varietäten mit Hilfe kombinatorischer Methoden zu beschreiben; siehe [22]. Die logarithmisch-algebraische Geometrie ist eine Verallgemeinerung dieser Theorie, die auf Fontaine, Illusie und K. Kato zurückgeht.

In dieser Doktorarbeit werden einige grundlegende Fragen von Kato und Illusie bzgl. einer geeigneten Theorie log-abelscher Varietäten behandelt; siehe [20], [14]. Ihre Vermutung besagt, dass diese im Zusammenhang zu der toroidalen Kompaktifizierung des Modulstacks der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten von Faltings und Chai steht; siehe [9]. In dieser Arbeit wird eine solche Theorie entwickelt und die Vermutung bestätigt.

Um die Resultate dieser Arbeit zu schildern, muß ich zu dem klassischen Problem der toroidalen Degenerationen polarisierter abelscher Varietäten zurückgehen. Ich will dieses Problem im eindimensionalen Fall, der Tate-Kurve, erklären. Es seien (R, π) ein vollständiger diskreter Bewertungsring und E eine elliptische Kurve über dem Quotientenkörper K mit zerfallender semiabelscher Reduktion. Nach einem bekannten Resultat von Tate hat die zugehörige rigid-analytische Kurve E^{rig} eine p -adische Uniformisierung

$$\mathbb{G}_{m,K}^{\text{rig}}/\lambda^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} E^{\text{rig}}.$$

Die Operation des Periodengitters $\lambda^{\mathbb{Z}}$ auf dem Torus $\mathbb{G}_{m,K} = \text{Spec}(K[T, T^{-1}])$ kann man auf ein (nicht kanonisches) relativ vollständiges Modell \tilde{P} herunterdrücken. Man konstruiert beispielsweise ein \tilde{P} durch kanonische Verklebung der affinen Schemata

$$\text{Spec}(R[\pi^n T, \pi^{-n+1} T^{-1}]), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die spezielle Faser \tilde{P}_0 ist eine Kette projektiver Geraden, die sich transversal schneiden. Auf der formellen Komplettierung von \tilde{P} operiert das Periodengitter frei und diskontinuierlich. Der Quotient existiert und ist algebraisierbar zu einem R -Schema P . Die Inklusion $E \hookrightarrow P$ ist eine toroidale R -Kompaktifizierung. Man wird später sehen, dass P und P_0 in geeigneten Kategorien Gruppenstrukturen tragen.

Im höherdimensionalen Fall stammt die entsprechende Konstruktion von Mumford, Raynaud, Faltings und Chai; siehe [31] [9]. Sie liefert für ein semiabelsches Schema A über einem vollständigen diskreten Bewertungsring R , dessen generische Faser A_η abelsch ist

und eine Polarisierung trägt, eine toroidale R -Kompaktifizierung $A \hookrightarrow P$. Die spezielle Faser P_0 heißt eine degenerierte abelsche Varietät.

Bei der Konstruktion von Faltings und Chai werden folgende Fragen nicht beantwortet: Zum einen sind die Kompaktifizierung P und P_0 nicht kanonisch. Zum anderen wird für P_0 keine von P unabhängige Beschreibung gegeben. Alexeev hat in [2] mit Hilfe seiner Theorie stabil-semiabelischer Varietäten kanonische Degenerationen konstruiert. Alexeev bemerkt jedoch, dass stabil-semiabelische Varietäten existieren, die keine degenerierten abelschen Varietäten sind; siehe Anhang B.

Lange Zeit waren Lösungen für die obigen Probleme nicht in Sicht. Kato äußerte in [20] die Idee, die Degenerationen in der logarithmischen Kategorie zu untersuchen. Sein Ansatzpunkt hierfür ist, dass das toroidale Schema P die kanonische Log-Struktur

$$\mathcal{O}_{P_0}^\times \cap \mathcal{O}_P \hookrightarrow \mathcal{O}_P$$

trägt. Eine Log-Struktur auf einem Schema X im Sinne von Fontaine-Illusie ist ein Homomorphismus von Garben von Monoiden $\mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, der einen Isomorphismus der Einheitengruppen induziert; siehe Abschnitt 2.1. Die spezielle Faser P_0 trägt eine kanonische Log-Struktur \mathcal{M}_{P_0} , die man durch Pullback erhält. Man sollte \mathcal{M}_{P_0} als zusätzliche Information verstehen, wie die irreduziblen Komponenten von P_0 verheften. Ist beispielsweise P lokal isomorph zu dem Spektrum von $R[x, y]/\langle x \cdot y - \pi \rangle$ mit einem Parameter π von R , so sind x, y, π nichttriviale Schnitte der Garbe \mathcal{M}_{P_0} mit der Relation $x \cdot y = \pi$. Der Gebrauch von Log-Strukturen hat mehrere Vorteile: Man kann das Schema P_0 , das im allgemeinen Singularitäten besitzt und reduzibel ist, mit Hilfe der Log-Struktur auf einfache kombinatorische Weise beschreiben. Ein weiterer Vorteil ist, dass das Log-Schema

$$\underline{P}_0 = (P_0, \mathcal{M}_{P_0})$$

schöne Eigenschaften hat. So ist \underline{P}_0 log-glatt über dem Restklassenkörper k , wobei dieser mit der Standard Log-Struktur $\mathcal{M}_k = k^\times \oplus \pi^\mathbb{N}$ versehen ist.

Als nächste Frage stellt sich, ob \underline{P}_0 eine Gruppenstruktur trägt. In der Kategorie der Log-Schemata gilt dies im allgemeinen nicht. Inspiriert durch ein berühmtes Theorem von Raynaud hatte Kato die Idee, die Kategorie an Log-Aufblasungen zu lokalisieren. Hierfür entwickelt er die Theorie der valuativen Log-Schemata; siehe Abschnitt 4.2. Man sieht leicht, dass in der lokalisierten Kategorie \underline{P}_0 in der Tat ein Gruppenobjekt ist. Die Eindeutigkeit der Degeneration spielt in der lokalisierten Kategorie keine Rolle. Es sei bemerkt, dass Kato in [20] lediglich den eindimensionalen Fall betrachtet hat. In diesem Fall heißen \underline{P} bzw. die spezielle Faser \underline{P}_0 eine Tate-Kato Kurve.

Umgekehrt kann man sich fragen, ob jede log-abelsche Varietät die Degeneration einer abelschen Varietät ist. Dafür werden zunächst log-abelsche Varietäten definiert, um anschließend zu zeigen, dass sie tatsächlich Degenerationen sind. Man betrachtet neben log-abelschen Varietäten allgemeiner log-semiabelsche Varietäten. Deren Definition orientiert sich an der klassischen Definition. So fordert man, dass eine log-semiabelsche Varietät eigentlich, zusammenhängend, log-glatt und eine Gruppe ist. Beispiele für log-semiabelsche Varietäten liefern projektive torische Varietäten; siehe Abschnitt 5.2. Diese sind im allgemeinen nicht Degenerationen abelscher Varietäten. Um solche Fälle auszuschließen, fordert man für eine log-abelsche Varietät zusätzlich, dass die Log-Struktur vertikal ist, d.h. eine log-abelsche Varietät ist lokal die spezielle Faser einer toroidalen Einbettung der Form

$X_\eta \hookrightarrow X$ über einem diskreten Bewertungsring. Nach den obigen Ausführungen ist eine degenerierte abelsche Varietät eine log-abelsche Varietät.

Die Hauptergebnisse dieser Doktorarbeit kann man nun wie folgt zusammenfassen:

In Theorem 5.3.9 wird zuerst gezeigt, dass jede log-semiabelsche Varietät \underline{A} eine klassische semiabelsche Varietät G als offene Untergruppe enthält. Ist \underline{A} die Degeneration einer abelschen Varietät, so ist G die spezielle Faser der Nullkomponente des Neron-Modells. Als ein wichtiges Korollar erhält man, dass log-abelsche Varietäten kommutative Gruppen sind. Diese Vermutung hat Illusie bereits in [15] geäußert.

Mit Hilfe von 5.3.9 kann man dann das Uniformisierungstheorem 5.6.3 für log-abelsche Varietäten beweisen. Hiernach kann man für eine log-abelsche Varietät \underline{A} eine universelle Überlagerung \underline{V} und ein Periodengitter $\Lambda \subset \underline{V}$ konstruieren, so dass gilt

$$\underline{V}/\Lambda \xrightarrow{\sim} \underline{A}. \quad (1)$$

Hierbei ist \underline{V} die spezielle Faser eines relativ vollständigen Modells des semiabelschen Schemas $G \otimes_k k[[\pi]]$ über dem diskreten Bewertungsring $k[[\pi]]$. Nach Lokalisierung an Log-Aufblasungen ist die Abbildung (1) ein Gruppenisomorphismus. Für den Beweis des Uniformisierungstheorems benötigt man neue Techniken. Das wesentliche Hilfsmittel ist die logarithmische Exponentialabbildung, die ähnliche Eigenschaften wie die Exponentialabbildung in der Differentialgeometrie besitzt; siehe Theorem 5.5.7.

Schließlich wird der ursprünglichen Frage nachgegangen, wann eine log-abelsche Varietät eine degenerierte abelsche Varietät ist. Hierbei behandle ich der Einfachheit halber nur den total degenerierten Fall, also dass die Nullkomponente ein Torus ist. Mit dem Uniformisierungstheorem kann man wie in [31] Polarisierungen für log-abelschen Varietäten definieren. Es wird gezeigt, dass eine log-abelsche Varietät genau dann eine Polarisierung hat, wenn sie ein projektives Schema ist. Hiermit erhält man in Theorem 5.7.12 ein Hauptresultat dieser Dissertation: Eine log-abelsche Varietät ist genau dann projektiv, wenn sie eine degenerierte abelsche Varietät ist.

Als eine weitere wichtige Konsequenz erhält man in Abschnitt 5.8 eine Interpretation der geometrischen Punkte von $\overline{\mathbf{A}}_g$, der toroidalen Kompaktifizierung des Modulstacks der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten. Diese trägt eine kanonische Log-Struktur. In Theorem 5.8.1 wird gezeigt, dass die prinzipal polarisierten log-abelschen Varietäten eindeutig den geometrischen Punkten von $\overline{\mathbf{A}}_g$ entsprechen.

Auf dem Weg zu diesen Resultaten über log-abelsche Varietäten werden zahlreiche Resultate bewiesen, die auch für sich genommen erwähnenswert sind:

In Theorem 2.3.2 wird eine konstruktive Beschreibung der Kombinatorik kohärenter Log-Strukturen mit Hilfe eines assoziierten Gruppoids von Fächern angegeben; siehe Abschnitt 1.4. Dies ist eine Verallgemeinerung bekannter Konstruktionen in [22] und [18] und liefert eine Beschreibung der Log-Aufblasungen. Die bisherigen Beschreibungen in der Literatur sind teilweise unpräzise und für Konstruktionen wenig praktikabel. Eine Hauptanwendung dieser Theorie ist ein Resultat über die Auflösung von Selbstüberschneidung via Log-Aufblasungen; siehe Proposition 2.5.13. Hierdurch erhält man eine Methode Log-Strukturen vom étalen Topos nach dem Zariski Topos absteigen zu lassen. Man beachte, dass das Kriterium für den Abstieg in [20] unvollständig ist.

In Theorem 3.2.10 werden log-glatte Log-Schemata, deren Log-Struktur keine Selbstüber-

schneidung haben, global als stratifizierter Raum beschrieben. Dies liefert eine Antwort auf eine Frage von Illusie in [14] nach der Gestalt solcher Log-Schemata.

In Theorem 4.3.9 wird gezeigt, dass die Kategorie der valuativen Log-Schemata äquivalent ist zu der Kategorie der Log-Schemata lokalsiert an Log-Aufblasungen. Dies ist das Analogon zu dem zitierten Theorem von Raynaud. Erst mit Hilfe dieses Theorems kann man konstruktiv mit valuativen Log-Schemata arbeiten. Kato benötigt in [20] nur ein schwächeres Resultat, weil er lediglich Schemata betrachtet, die lokal von endlichem Typ über einer Basis sind. Dies trifft aber nicht den Kern des Problems.

Dies zeigt, dass es noch viele offene Probleme im Zusammenhang mit log-semiabelschen Varietäten gibt. Hierzu noch ein paar Anmerkungen:

Ein wichtiges Problem ist die Uniformisierung allgemeiner log-semiabelscher Varietäten. Die Schwierigkeiten im Vergleich zum abelschen Fall entstehen daraus, dass Randkomponenten vorhanden sein können. Dies sieht man zum Beispiel an torischen Varietäten. Eine log-abelsche Varietät verhält sich dagegen wie eine glatte Mannigfaltigkeit. Allgemeiner müßte man eine Theorie symmetrischer Log-Räume entwickeln, deren Uniformisierung durch die logarithmische Exponentialabbildung gegeben ist.

Ein weiteres offenes Problem ist die Uniformisierung log-(semi)abelscher Schemata über einer höherdimensionalen Basis \underline{S} . Hier ist die Situation wesentlich komplizierter, zum einen, weil die Basis zunächst in Strata zerlegt werden muß und zum andern, weil der universelle Überlagerungsraum eine komplizierte Struktur hat. Hierbei bezieht sich der Begriff höherdimensional sowohl auf die Log-Struktur \mathcal{M}_S , als auch auf das Schema S . Dieses Problem spiegelt sich auch in den Komplikationen der Mumford-Konstruktion über einer höherdimensionalen Basis wieder. Ein Resultat in diese Richtung liefert Korollar 5.3.15. Es stellt einen Zusammenhang her zwischen den log-semiabelschen und den stabil-semiabelschen Schemata von Alexeev. Für eine Basis mit trivialer Log-Struktur liefert Theorem 5.4.2 eine Klassifikation: Die log-semiabelschen Schemata hierüber sind induziert durch torische Kompaktifizierungen Toruserweiterungen abelscher Schemata. Schließlich bleibt zu klären, ob die toroidale Kompaktifizierung $\overline{\mathbf{A}}_g$ tatsächlich Familien log-abelscher Schemata parametrisiert. Olsson hat in [36] diese Frage im eindimensionalen Fall studiert. Weiterhin hat er Level-Strukturen auf Tate-Kato Kurven eingeführt und ihre Moduli beschrieben. Auch dies kann man vermutlich verallgemeinern.

Meine Hoffnung ist, dass die Methoden, die in dieser Arbeit entwickelt wurden, einen Zugang zu den geschilderten Problemen eröffnen.

Hinweise für den Leser

Zum Schluß noch einige Instruktionen für den Leser, der möglichst schnell zu den Hauptergebnissen dieser Arbeit vorstoßen möchte.

Dazu reicht es Log-Strukturen zu betrachten, die keine Selbstüberschneidung haben. Der Abschnitt 1.4 über Gruppoide von Fächern ist dafür nicht unbedingt nötig. Wer lieber die klassische Sprache der Polyederkegelkomplexe verwendet, kann zudem auf Abschnitt 1.2 verzichten, wo Katos Fächer diskutiert werden.

Für Log-Strukturen ohne Selbstüberschneidung benötigt man in Kapitel 2 nicht die Spra-

che der Topoi. Den Abschnitt 2.3 über die Kombinatorik von Log-Strukturen kann man übergehen, denn die entsprechenden Aussagen für Log-Strukturen ohne Selbstüberschneidung findet man auch in Abschnitt 2.4 wieder. In Abschnitt 2.5 werden Log-Modifikationen eingeführt. Diese sind im weiteren Verlauf ein unentbehrliches Werkzeug.

In Kapitel 3 ist vor allem Theorem 3.2.10 zu beachten, dass eine Beschreibung log-glatte Varietäten durch toroidale Einbettungen liefert. Die anderen Resultate spielen keine so wichtige Rolle und können im weiteren Verlauf nachgeschlagen werden.

Katos valuative Log-Schemata kann man wegen Theorem 4.3.9 als Objekte in der an Log-Aufblasungen lokalisierten Kategorie auffassen. Das Theorem wird hierbei nicht in seiner vollen Stärke in Anspruch genommen, weil man in den Hauptresultaten lediglich Schemata betrachtet, die lokal von endlichem Typ über einer festen Basis sind.

Das Kapitel 5 ist der Kern dieser Dissertation. Nachdem der Leser sich mit der Definition einer Log-Gruppe in Abschnitt 5.1 etwas vertraut gemacht hat, findet er in Abschnitt 5.2 einige Beispiele. Diese sind notwendig für das Verständnis der universellen Überlagerungen log-abelscher Varietäten. In Abschnitt 5.4 werden log-abelsche Varietäten definiert. Unbedingt beachten sollte man in diesem Abschnitt das Theorem 5.3.9, das eine große Rolle im weiteren Verlauf spielt. Sehr wichtig ist der Abschnitt 5.5. Hier wird die logarithmische Exponentialabbildung definiert. Mit ihrer Hilfe wird als ein Hauptergebnis das Uniformisierungstheorem 5.6.3 bewiesen. Die Hauptresultate Theorem 5.7.12 und Theorem 5.8.1 folgen dann aus dem Uniformisierungstheorem.

Ulm, im April 2005

Volker Pahnke

Kapitel 1

Geometrie der Monoide

1.1 Kommutative Monoide

Basierend auf (§5 in [18]) werden in diesem Abschnitt die Grundzüge der Theorie der kommutativen Monoide vorgestellt. Der Grundgedanke ist hierbei immer, dass ein Monoid einem kommutativen Ring entspricht. Die meisten Aussagen in diesem Abschnitt haben eine Entsprechung in der kommutativen Ringtheorie.

Konvention. *Alle Monoide sind im folgenden kommutativ und besitzen ein neutrales Element. Sie werden teilweise multiplikativ und teilweise additiv geschrieben.*

Beispiel 1.1.1. Eine prominente Rolle als Monoide spielen im folgenden die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ und die nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ jeweils mit der Addition als Verknüpfung.

1.1.2. Es bezeichnet M^\times die *Einheitengruppe* und M^{gp} die *Grothendieckgruppe*. Diese ist der Quotient $M \times M / \sim$, wobei $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ ist, wenn ein $f \in M$ existiert mit

$$f \cdot a_1 \cdot b_2 = f \cdot a_2 \cdot b_1.$$

1.1.3. - Ein Monoid heißt *scharf*, wenn seine Einheitengruppe trivial ist.

- Die *Charakteristik* eines Monoids M ist der scharfe Monoid

$$\overline{M} := M/M^\times.$$

- Ein Monoid M heißt *integer*, wenn die kanonische Abbildung $M \rightarrow M^{\text{gp}}$ injektiv ist.

- Ein integer Monoid M heißt *saturiert*, wenn gilt:

$$f \in M^{\text{gp}} \text{ und } f^n \in M \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \implies f \in M$$

- Ein Monoid heißt *ausgezeichnet*, wenn er integer und endlich erzeugt ist.

- Ein Monoid heißt fs (fine and saturated), wenn er ausgezeichnet und saturiert ist.

- Für einen fs Monoid M ist $\overline{M}^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$. Somit gilt (nicht kanonisch)

$$M \xrightarrow{\sim} \overline{M} \oplus M^\times.$$

- Die *Saturierung* eines Monoids M ist der Untermonoid $M^{\text{sat}} \subset M^{\text{gp}}$ aller Elemente $m \in M^{\text{gp}}$, so dass eine Potenz m^i , $i \in \mathbb{N}$ in dem Bild von $M \rightarrow M^{\text{gp}}$ liegt.

1.1.4. - Die *Monoidalgebra* eines Monoids M über einem Ring R ist

$$R[M] := \left\{ \sum_{m \in M} a_m \cdot m; a_m \in R \right\}$$

mit $a_m = 0$ für fast alle $m \in M$. Addition und Multiplikation sind die offensichtlichen.

- Für einen fs Monoid M mit $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$ und einen normalen Integritätsbereich R ist auch die Monoidalgebra $R[M]$ normal (Proposition 1 in [13]).

- Für einen fs Monoid M mit $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$ und einen Cohen-Macaulay Ring R ist auch die Monoidalgebra $R[M]$ Cohen-Macaulay (Theorem 1 in [13]).

- Ist M ein endlich erzeugter Monoid, so ist $\mathbb{C}[M^{\text{sat}}]$ endlich über $\mathbb{C}[M]$ (§33 in [27]). Somit ist die Saturierung M^{sat} ebenfalls endlich erzeugt und daher ein fs Monoid.

1.1.5. - Ein Element m eines Monoids M heißt *irreduzibel*, wenn gilt

$$m \in M^+ - (M^+)^2 \quad \text{mit} \quad M^+ := M - M^\times.$$

- Ein endlich erzeugter, scharfer Monoid M hat nur endlich viele irreduzible Elemente. Diese bilden das eindeutige minimale Erzeugendensystem von M .

1.1.6. - Für einen Monoid M heißen die Mengen mit M -Operation auch *M -Mengen*.

- Für M -Mengen H_1, H_2 definiert man das *Tensorprodukt* $H_1 \otimes_M H_2$ als Quotient

$$H_1 \times H_2 / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation erzeugt wird von den Relationen

$$(h_1, m \cdot h_2) \sim (m \cdot h_1, h_2) \quad \text{für} \quad h_i \in H_i, m \in M.$$

Das Tensorprodukt $H_1 \otimes_M H_2$ ist ebenfalls eine M -Menge.

- Das Tensorprodukt von Homomorphismen von Monoiden $M \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ (*Pushout*) ist das Koprodukt in der Kategorie der Monoide und man schreibt hierfür

$$M_1 \oplus_M M_2.$$

1.1.7. - Ein *Ideal* eines Monoids M ist eine M -Untermenge von M .

- Ein *Bruchideal* von M ist eine M -Untermenge $I \subset M^{\text{gp}}$, so dass $f \cdot I$ für ein Element $f \in M$ in dem Bild der kanonischen Abbildung $M \rightarrow M^{\text{gp}}$ liegt.

- Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset M$ heißt *prim*, wenn $M - \mathfrak{p}$ ein Untermonoid ist. Insbesondere sind das maximale Ideal $M^+ := M - M^\times$ und das minimale Ideal \emptyset prim.

- Aus dem *Hilbertschen Basissatzes* folgt, dass alle Ideale I eines endlich erzeugten Monoids M endlich erzeugt sind, d.h. es existieren endlich viele $f_1, \dots, f_i \in I$ mit

$$I = M \cdot f_1 \cup \dots \cup M \cdot f_i$$

1.1.8. - Das *Spektrum* $\text{Spec}(M)$ eines Monoids M ist die Menge aller seiner Primideale. Ein Homomorphismus von Monoiden induziert eine Abbildung der Spektren.

- Ist $S \subset M$ ein Untermonoid, so ist die *Lokalisierung von M an S* der Monoid

$$S^{-1}M := S^{\text{gp}} \otimes_S M$$

Das Spektrum $\text{Spec}(S^{-1}M)$ besteht aus allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(M)$ mit

$$S \cap \mathfrak{p} = \emptyset.$$

- Die *Zariskitopologie auf $\text{Spec}(M)$* wird erzeugt von den offenen Teilmengen

$$\text{Spec}(f^{-\mathbb{N}}M), f \in M.$$

1.2 Katos Fächer

Im Zentrum dieses Abschnitts steht der Begriff des *Fächers* (engl. *Fans*) von K. Kato (§9 in [18]). *Katos Fächer sind eine Verallgemeinerung der Polyederkegelkomplexe mit integraler Struktur in [22].* Dieser Zusammenhang wird im nächsten Abschnitt behandelt. Betrachtet man die Korrespondenz zwischen den Monoiden und Ringen, so entsprechen Katos Fächer den Schemata in der algebraischen Geometrie.

1.2.1. - *Ein monoidaler Raum (F, \mathcal{M}_F) besteht aus einem topologischen Raum F und einer scharfen Garbe von Monoiden \mathcal{M}_F hierauf. Ein Morphismus monoidaler Räume*

$$(f, f^\sharp) : (G, \mathcal{M}_G) \rightarrow (F, \mathcal{M}_F)$$

besteht aus einer stetigen Abbildung $f : G \rightarrow F$ und einem Homomorphismus von Garben von Monoiden $f^\sharp : f^{-1}\mathcal{M}_F \rightarrow \mathcal{M}_G$ mit trivialem Kern

$$\text{Ker}(f^\sharp) = 1.$$

- Eigenschaften monoidaler Räume wie ausgezeichnet oder fs definiert man halmweise.

- Objekte wie \mathcal{M}_F -Garben oder Ideale definiert man als die entsprechenden Garben.

1.2.2. - *Das Spektrum eines Monoids trägt eine kanonische monoidale Struktur:*

Die Strukturgarbe \mathcal{M}_F auf $F = \text{Spec}(M)$ hat über einer offenen Teilmenge

$$\text{Spec}(f^{-\mathbb{N}}M), f \in M$$

die Schnitte $\overline{f^{-\mathbb{N}}M}$. Man nennt (F, \mathcal{M}_F) einen affinen Fächer. Ein allgemeiner Fächer ist ein monoidaler Raum, der eine offene Überdeckung mit affinen Fächern besitzt.

1.2.3. - Der kontravariante Funktor Spec von den Monoiden in die monoidalen Räume ist rechtsadjungiert zu dem globale Schnitte Funktor $F \mapsto \Gamma(F, \mathcal{M}_F)$.

- In der Kategorie der Fächer existieren alle (Faser)Produkte.

1.2.4. - Es seien M ein Monoid und H eine M -Menge. Dann erhält man auf dem affinen Fächer $\text{Spec}(M)$ eine assoziierte $\mathcal{M}_{\text{Spec}(M)}$ -Garbe \mathcal{H} . Die Schnitte von \mathcal{H} über der offenen Teilmenge $\text{Spec}(f^{-\mathbb{N}}M)$, $f \in M$ definiert man als

$$H \otimes_M \overline{f^{-\mathbb{N}}M}.$$

Eine \mathcal{M}_F -Garbe auf einem allgemeinen Fächer F heißt quasikohärent (bzw. kohärent), wenn sie auf affinen offenen Teilen obige Form hat (und lokal endlich erzeugt ist).

1.2.5. - *Wie in der algebraischen Geometrie definiert man projektive Fächer:*

Es seien M ein Monoid und $\nu : M \rightarrow \mathbb{N}$ ein Homomorphismus. Dann trägt M eine kanonische *Graduierung*: Mit $M_n = \nu^{-1}(n)$ ist M die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{n \geq 0} M_n,$$

wobei M_0 ein Untermonoid von M ist, der auf den *homogenen Anteilen* M_n operiert.

Weiterhin trägt jede Lokalisierung $f^{-\mathbb{N}}M$, $f \in M$ eine induzierte Graduierung. Die affinen Fächer $\text{Spec}((M_f)_0)$ mit $f \in M_n$, $n > 0$ verkleben zu dem *projektiven Fächer*

$$\text{Proj}(M_\bullet).$$

Die Konstruktion kann man auf offensichtliche Weise globalisieren:

Man betrachtet einen Fächer F und einen graduierten \mathcal{M}_F -Monoid

$$\mathcal{M}_\bullet = \coprod_{n \geq 0} \mathcal{M}_n,$$

so dass die homogenen Anteile \mathcal{M}_n kohärente \mathcal{M}_F -Garben sind. Dann kann man den induzierten *projektiven Fächer* definieren

$$\text{Proj}(\mathcal{M}_\bullet) \rightarrow F.$$

- *Wie in der algebraischen Geometrie definiert man Fan-Aufblasungen:*

Es seien F ein Fächer und \mathcal{I} ein kohärentes Ideal (bzw. Bruchideal) von \mathcal{M}_F . Dann definiert man die *Fan-Aufblasung von F an \mathcal{I}* als

$$F_{\mathcal{I}} := \text{Proj}\left(\coprod_{n \geq 0} \mathcal{I}^n\right) \rightarrow F.$$

Beispiel 1.2.6. Für einen ausgezeichneten Fächer F ist die Saturierung F^{sat} die Fan-Aufblasung an dem kohärenten Bruchideal $\mathcal{M}_{F^{\text{sat}}}$, wie man leicht sieht.

1.2.7. - *Eine Abbildung von f s Fächern $\varphi : G \rightarrow F$ heißt Fan-Modifikation, wenn gilt:*

1. Die induzierte Abbildung $G(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ist injektiv.

Hierbei ist $F(\mathbb{R}_{\geq 0}) := \text{Mor}(\text{Spec}(\mathbb{R}_{\geq 0}), F)$.

2. Der Homomorphismus $\varphi^\sharp : \mathcal{M}_F^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{gp}}$ ist surjektiv.

- Es heißt $\varphi : G \rightarrow F$ eine *eigentliche Fan-Modifikation*, wenn zusätzlich gilt:

1. Die induzierte Abbildung $G(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ist bijektiv.

2. φ ist topologisch quasikompakt.

- Fan-Aufblasungen sind eigentliche Fan-Modifikation. Der Umkehrschluß gilt nicht!

1.3 Polyederkegelkomplexe

In diesem Abschnitt wird der genaue Zusammenhang zwischen Katos Fächern und den rationalen Polyederkegelkomplexen in [22] dargestellt.

Konvention. Im folgenden heißt eine Teilmenge $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ der Form

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v_n \quad \text{mit } v_i \in \mathbb{Q}^n,$$

die keinen nichttrivialen Unterraum enthält, (*rationaler*) *Polyederkegel*.

1.3.1. Für die folgende Definition siehe (Definition 5 und 6 in [22], Kapitel II, §1).

Ein *Polyederkegelkomplex* (mit *integraler Struktur*) $\Sigma = (|\Sigma|, (\sigma_j^\circ), (\Lambda_j))$ besteht aus:

1. Einem topologischen Raum $|\Sigma|$.

2. Einer disjunkten Überdeckung durch eine Familie lokal abgeschlossener Teilmengen σ_j° , die Zellen genannt werden, so dass der Abschluß einer Zelle

$$\sigma_j := (\sigma_j^\circ)^{\text{cls}}$$

die Vereinigung von Zellen ist und so dass $|\Sigma|$ die CW-Topologie trägt, d.h. $U \subset |\Sigma|$ ist genau dann offen, wenn die Durchschnitte $U \cap \sigma_j$ offen in σ_j sind.

3. Für jede Zelle ist eine Familie Λ_j stetiger Funktionen gegeben

$$f : \sigma_j \rightarrow \mathbb{R},$$

die bzgl. der Addition ein Gitter bilden und eine Einbettung induzieren

$$\sigma_j \hookrightarrow \text{Hom}(\Lambda_j, \mathbb{R}),$$

deren Bild ein rationaler Polyederkegel maximaler Dimension ist. Weiterhin sind die Familien Λ_j mit der Seitenrelation kompatibel:

$$\Lambda_i = \{f|_{\sigma_i} ; f \in \Lambda_j\} \quad \text{für } \sigma_i \subset \sigma_j.$$

Konvention. Die Teilmengen σ_j in 1.3.1 sind die abgeschlossenen Zellen von $|\Sigma|$. Der Einfachheit halber werden sie folgenden ebenfalls Zellen genannt.

Warnung. *Polyederkegelkomplexe sind keine Polyederkegelzerlegungen!*

Eine rationale Polyederkegelzerlegung von \mathbb{R}^n ist ein Komplex rationaler Polyederkegel in \mathbb{R}^n (Definition 3 in [22], Kapitel 1, §1). Somit besteht eine rationale Polyederkegelzerlegung aus einem Polyederkegelkomplex und einer Einbettung in einen Vektorraum. Später in 5.2.2 werden rationale Polyederkegelzerlegungen eine Rolle spielen.

1.3.2. - Für einen fs Fächer F ist die Menge der $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -wertigen Punkte

$$F(\mathbb{R}_{\geq 0}) := \text{Mor}(\text{Spec}(\mathbb{R}_{\geq 0}), F)$$

auf kanonische Weise ein Polyederkegelkomplex:

- Die Zellen von $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entsprechen den topologischen Punkten $t \in F$. Die Zelle σ_t° besteht aus allen $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -wertigen Punkten mit unterliegendem topologischen Punkt t :

$$\sigma_t^\circ = \{\bar{t} \in F(\mathbb{R}_{\geq 0}) ; \bar{t}(\mathbb{R}^+) = t\},$$

wobei \mathbb{R}^+ der abgeschlossene Punkt in $\text{Spec}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ist.

- Die integrale Struktur ist induziert durch die Garbe $\mathcal{M}_F^{\text{gp}}$, indem man Schnitte von $\mathcal{M}_F^{\text{gp}}$ als reelle Funktionen auf dem Raum $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ interpretiert.

1.3.3. - Die Polyederkegelkomplexe bilden eine Kategorie. Die Morphismen sind zelluläre stetige Abbildungen, welche die integralen Strukturen respektieren.

- Aus *Gordans Lemma* (Lemma 2 in [22], Kapitel 1, §1) erhält man:

Der Funktor $F \mapsto F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ stellt eine Äquivalenz von Kategorien her zwischen den fs Fächern und den Polyederkegelkomplexen mit integraler Struktur.

1.3.4. *Es sei F ein fs Fächer. Dann entsprechen fs Fan-Modifikationen $G \rightarrow F$ eindeutig rationalen Unterteilungen des Polyederkegelkomplexes $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ (§1 in [22], Kapitel II).*

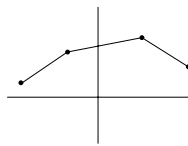
1.3.5. - Kohärente Bruchideale $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_F^{\text{gp}}$ induzieren stückweise lineare Funktionen

$$f_{\mathcal{I}} : F(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ist \mathcal{I} auf einer affinen offenen Teilmenge $\text{Spec}(M)$ induziert durch ein Bruchideal $I \subset M^{\text{gp}}$, so definiert man für $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -wertige Punkte $\bar{t} \in \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0}) \subset F(\mathbb{R}_{\geq 0})$

$$f_{\mathcal{I}}(\bar{t}) := \min(f(\bar{t}) ; f \in I).$$

Insbesondere ist die Funktion $f_{\mathcal{I}}$ auf jeder Zelle *konvex*. Anders als in der Analysis bedeutet hierbei Konvexität in der torischen Geometrie:



Für den assoziierten Polyederkegelkomplex einer Fan-Aufblasungen gilt:

$F_{\mathcal{I}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ist die größte Unterteilung von $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$, für die $f_{\mathcal{I}}$ auf jeder Zelle linear ist.

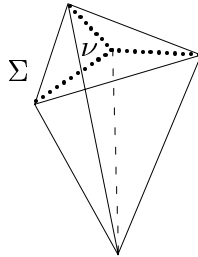
- Rationale Unterteilungen der Form $F_{\mathcal{I}}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ nennt man *projektiv*.

Beispiel 1.3.6. Es seien M ein scharfer fs Monoid und $\nu : M \rightarrow \mathbb{N}$ ein surjektiver Homomorphismus, so dass $M_1 = \nu^{-1}(1)$ den Monoid M erzeugt.

Nach 1.2.5 erhält man einen projektiven Fächer $F = \text{Proj}(M_{\bullet})$. Diesen kann man wie folgt geometrisch konstruieren. Man betrachtet den dualen Polyederkegel

$$\Sigma = \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Es entspricht ν einem rationalen Punkt in Σ , der im Inneren liegt. Dann besitzt Σ eine kanonische rationale Unterteilung: Die Zellen σ_i sind die rationalen Polyederkegel, die jeweils von einer echten Seite von Σ und ν aufgespannt werden.



Man bildet den Vektorraum $V = \text{Hom}(M, \mathbb{R})$. Der Vektorraum $V_0 = \text{Hom}(M_0, \mathbb{R})$ ist ein rationaler Quotient von V . Durch Projektion der σ_i nach V_0 erhält man eine rationale Polyederzerlegung von V_0 . Diese ist der assoziierte Polyederkegelkomplex $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Später in 3.2.3 wird eine ähnliche Konstruktion untersucht.

1.4 Gruppoide von Fächern

In diesem Abschnitt werden *strikte Gruppoide von Fächern* definiert und untersucht. Sie sind eine Verallgemeinerung der Fächer von Kato und werden später in Abschnitt 2.3 ein Hilfsmittel darstellen, um die Kombinatorik von Log-Strukturen zu untersuchen.

Einführend betrachtet man das folgende Beispiel:

Beispiel 1.4.1. Man betrachtet einen Fächer F , offene Unterfächer U_1, U_2 und einen Isomorphismus $\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \subset F$ mit der Eigenschaft

$$\varphi|_{U_1 \cap U_2} = \text{id}_{U_1 \cap U_2}.$$

Dann erhält man eine *kategorische Äquivalenzrelation von Fächern*

$$[s, t : R_{\varphi} := F \amalg U_1 \rightrightarrows F] \text{ mit}$$

$$s|_F = t|_F = \text{id}_F, \quad s|_{U_1} = \text{id}_{U_1} \quad \text{und} \quad t|_{U_1} = \varphi.$$

Die Äquivalenzrelation R_φ heißt *effektiv*, wenn eine strikte Abbildung von Fächern $F \rightarrow G$ existiert und R_φ induziert ist durch das Faserprodukt von Fächern

$$F \times_G F.$$

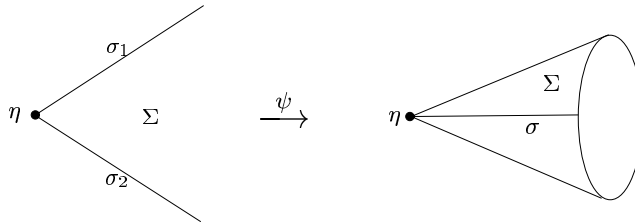
Äquivalent hierzu ist, dass für alle affinen offenen Teilmengen $V \subset F$ gilt

$$V \cap U_1 = V \cap U_2.$$

Man betrachtet nun eine konkrete Situation:

Es seien $F = \text{Spec}(\mathbb{N}^2)$, $U_1 = \text{Spec}(\mathbb{N}^2/\mathbb{N} \oplus 0)$ und $U_2 = \text{Spec}(\mathbb{N}^2/0 \oplus \mathbb{N})$. Dann sind die U_i isomorph zu $\text{Spec}(\mathbb{N})$, so dass $\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ eindeutig bestimmt ist.

Die induzierte topologische Äquivalenzrelation auf $F(\mathbb{R}_{\geq 0}) \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ist effektiv und kann herausgeteilt werden. Dies wird in der folgenden Skizze dargestellt:



Hierbei sind $\eta, \sigma_1, \sigma_2, \Sigma$ die vier Zellen von $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Weiterhin ist ψ die topologische Quotientenabbildung, die σ_1, σ_2 identifiziert. Der Quotientenraum trägt keine Struktur als Polyederkegelkomplex. Somit ist R_φ nicht effektiv.

Bemerkung 1.4.2. Die Grundlagen aus der Theorie der Gruppoide und Topoi, die in diesem Abschnitt benötigt werden, findet man im Anhang A.

Ganz analog wie in 1.2.1 definiert man:

Definition 1.4.3. 1. Ein monoidaler Topos $(\mathcal{X}, \mathcal{M}_{\mathcal{X}})$ besteht aus einem Topos \mathcal{X} und einer scharfen Garbe von Monoiden $\mathcal{M}_{\mathcal{X}}$ hierauf.

2. Die monoidalen Topoi bilden eine 2-Kategorie. Die 1-Morphismen

$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{M}_{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{M}_{\mathcal{Y}})$$

sind die offensichtlichen und die 2-Morphismen $\alpha : f \Rightarrow g$ sind die natürlichen Transformationen $\alpha : g^{-1} \Rightarrow f^{-1}$, für die ein kommutatives Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{g^\#} & \mathcal{M}_{\mathcal{X}} \\ \alpha^\# \downarrow & & \parallel \\ f^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{M}_{\mathcal{X}} \end{array}$$

3. Ein monoidaler Topos heißt Fächer Étendue, falls er lokal isomorph ist zu $(\text{Sh}(F), \mathcal{M}_F)$, wobei (F, \mathcal{M}_F) ein Fächer ist (siehe Definition A.0.12).

Definition 1.4.4. Ein Morphismus monoidaler Topoi $f : (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ heißt strikt, wenn die Abbildung $f^\sharp : f^{-1}\mathcal{M}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X$ ein Isomorphismus ist.

Eine Abbildung von Fächern ist genau dann strikt, wenn sie ein lokaler Isomorphismus ist. Daher definiert man ganz analog wie in A.0.2:

Definition 1.4.5. Ein Gruppoid von Fächern $[s, t : F_1 \rightrightarrows F_0]$ heißt strikt, falls die beiden Strukturabbildungen s, t strikt sind.

Bemerkung 1.4.6. Die strikten Gruppoide von Fächern bilden eine 2-Kategorie und modulo Morita-Äquivalenz eine 1-Kategorie.

Beispiel 1.4.7. Es sei Γ eine Gruppe, die auf einem Fächer F operiert. Dann kann man in der Kategorie der strikten Gruppoide von Fächern den Quotienten $[F/\Gamma]$ bilden.

Nach A.0.10 definiert ein strikter Gruppoid von Fächern F einen monoidalen Topos

$$\mathrm{Sh}(F) = (\mathrm{Sh}(F), \mathcal{M}_F),$$

wobei man der Einfachheit halber die Strukturgarbe meistens nicht angibt.

Weil Fächer topologisch schlicht sind (siehe A.0.13), folgt aus Proposition A.0.15:

Proposition 1.4.8. Die Kategorien der strikten Gruppoide von Fächern modulo Morita-Äquivalenz und der Fächer Etendues sind kanonisch äquivalent.

Beispiel 1.4.9. Die Kategorie der strikten Gruppoide von Fächern mit den strikten Abbildungen hat ein terminales Objekt $\mathfrak{F}\mathfrak{an}$. Man konstruiert $\mathfrak{F}\mathfrak{an}$ wie den *Haefliger-Gruppoid aller Keime von Diffeomorphismen* in [11]:

Es sei $M_i, i \in I$ ein Stellvertretersystem der Isomorphieklassen der Monoide. Man definiert dann den Fächer F_0 als die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{i \in I} \mathrm{Spec}(M_i).$$

Man betrachtet nun die *Keime von Isomorphismen des Fächers F_0* . Ein solcher Keim besteht aus einem Isomorphismus punktierter Fächer

$$\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2, \quad \varphi(t_1) = t_2$$

wobei U_i ein offener Unterfächer von F_0 ist, der t_i enthält. Die Menge aller Keime F_1 trägt eine kanonische Topologie. Eine Umgebungsbasis der Topologie bilden die Mengen

$$\{(t_1, t_2, \varphi) ; \varphi(t_1) = t_2, t_1 \in U_1\},$$

für feste Isomorphismen offener Unterfächer $\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$. Der Raum der Keime trägt eine kanonische Struktur als strikter Gruppoid von Fächern

$$\mathfrak{F}\mathfrak{an} := [s, t : F_1 \rightrightarrows F_0],$$

wobei s, t die kanonischen Projektionen $(t_1, t_2, \varphi) \mapsto t_i$ sind.

Die Eigenschaften von $\mathfrak{F}\mathfrak{an}$ als terminales Objekt sind evident.

1.4.10. Die meisten Konstruktionen für Fächer haben eine Verallgemeinerung für strikte Gruppoide von Fächern. So entsprechen *Fan-Modifikationen* $f : G \rightarrow F$ equivarianten Fan-Modifikationen des Objektraums F_0 , d.h. es existiert ein kartesisches Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f_1} & F_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_0 \times G_0 & \xrightarrow{(f_0, f_0)} & F_0 \times F_0 \end{array}$$

Auf offensichtliche Weise definiert man *eigentliche Fan-Modifikationen*, *(quasi)kohärente \mathcal{M}_F -Garben* und *Fan-Aufblasungen an kohärenten Bruchidealen*.

Man definiert eine wichtige Unterkategorie der strikten Gruppoide von Fächern:

Definition 1.4.11. *Es sei $F = [s, t : F_1 \rightrightarrows F_0]$ ein strikter Gruppoid von Fächern.*

Es bezeichne $2\text{-Aut}_F(t_0)$ die 2-Automorphismengruppe in dem Punkt $t_0 \in F_0$:

$$2\text{-Aut}_F(t_0) := F_1 \times_{s,t} (t_0, t_0)$$

Diese operiert auf kanonische Weise auf dem Halm \mathcal{M}_{F_0, t_0} .

Es heißt F reduziert, wenn diese Operation treu ist für alle Punkte $t_0 \in F_0$.

Ein reduzierter strikter Gruppoid von Fächern heißt auch

Fächer mit Selbstüberschneidung (mSü).

Beispiel 1.4.12. Der strikte Gruppoid von Fächern \mathfrak{Fan} in Beispiel 1.4.9 ist reduziert.

In der nächsten Proposition sind einige Fakten über Fächer mit Selbstüberschneidung zusammengefaßt, die im folgenden eine Rolle spielen:

Proposition 1.4.13. 1. *Für jedes Paar strikter Abbildungen von Fächern*

$$s, t : F_1 \rightrightarrows F_0$$

existiert der Kokern F in der Kategorie der reduzierten strikten Gruppoide von Fächern mit den strikten Abbildungen, d.h. es existiert eine strikte Abbildung

$$f : F_0 \rightarrow F,$$

wobei F reduziert ist und f die universellen Eigenschaft hat

$$f \circ s = f \circ t : F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F.$$

Man sagt, dass der Fächer mSü F von $s, t : F_1 \rightrightarrows F_0$ erzeugt wird.

2. *Die Inklusion von den Fächern mSü in die strikten Gruppoide von Fächern jeweils mit den strikten Abbildungen besitzt einen rechtsadjungierten Funktor*

$$F \mapsto F^{\text{red}}.$$

3. Die 2-Automorphismengruppen eines Fächers mit Selbstüberschneidung, der lokal von endlichem Typ ist, sind endlich.

Beweis. Zu 1.) Man betrachtet den Gruppoid der Keime von Isomorphismen von F_0

$$H = [s_H, t_H : H_1 \rightrightarrows F_0]$$

(siehe Beispiel 1.4.9). Dann existiert ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & F_0 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow \text{id} \\ H_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_H} \\ \xrightarrow{t_H} \end{array} & F_0 \end{array}$$

dessen Abbildungen strikt sind. Man definiert F als von $h_1(G)$ erzeugten Gruppoid in H . Dann ist F reduziert und der Kokern der Abbildungen s, t , wie man sieht.

Die zweite Aussage zeigt man, indem man die erste anwendet auf eine Darstellung

$$F = [F_1 \rightrightarrows F_0].$$

Zu 3.) Man betrachtet einen Fächer mSü $[F_1 \rightrightarrows F_0]$. Die 2-Automorphismengruppe in dem Punkt $t_0 \in F_0$ operiert per Definition treu auf dem Halm \mathcal{M}_{F_0, t_0} .

Die Behauptung folgt daher aus 1.1.5, denn hiernach bilden die irreduziblen Elemente e_1, \dots, e_n das eindeutige minimale Erzeugendensystem von \mathcal{M}_{F_0, t_0} und somit ist

$$\text{Aut}(M) \subset \text{Per}(e_1, \dots, e_n).$$

□

Sehr wichtig ist die nächste Proposition. Sie wird später in Proposition 2.5.13 benötigt, um die Selbstüberschneidung von Log-Strukturen aufzulösen.

Proposition 1.4.14. *Es sei F ein quasikompakter fs strikter Gruppoid von Fächern. Dann existiert eine Fan-Aufblasung $F_{\mathcal{I}}$, so dass $(F_{\mathcal{I}})^{\text{red}}$ keine Selbstüberschneidung hat.*

Warnung. *Im allgemeinen existiert kein kanonischer Morphismus $(F_{\mathcal{I}})^{\text{red}} \rightarrow F$.*

Beweis. Es sei $F = [s, t : F_1 \rightrightarrows F_0]$, wobei ohne Einschränkung F_0 quasikompakt sei.

Es seien $t_1, \dots, t_n \in F_0$ die abgeschlossenen Punkte. Dann ist

$$U_0 = F_0 - \{t_1, \dots, t_n\}$$

ein offener Unterfächer von F_0 und F enthält den offenen Untergruppoid

$$U = [F_1 \times_{s,t} (U_0)^2 \rightrightarrows U_0].$$

Man benötigt das folgende einfache Lemma:

Lemma 1.4.15. *Jedes kohärente Ideal \mathcal{I} auf F_0 wird von einem equivarianten kohärenten Ideal \mathcal{J} dominiert, d.h. es existiert ein kohärentes Ideal \mathcal{K} mit*

$$\mathcal{J} = \mathcal{I} \cdot \mathcal{K}.$$

Beweis. Man macht Induktion nach $\dim(F_0)$. Der Fall $\dim(F_0) \leq 1$ ist trivial.

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf U_0 findet man equivariante kohärente Ideale $\mathcal{J}', \mathcal{K}'$ auf U_0 , so dass für die Einschränkung $\mathcal{I}|_{U_0}$ gilt

$$\mathcal{J}' = \mathcal{I}|_{U_0} \cdot \mathcal{K}'.$$

Nach (Lemma 1 in [22], §2, Kapitel I) und 1.3.5 hat \mathcal{K}' eine Fortsetzung zu einem kohärenten Ideal \mathcal{K} auf F_0 . Ohne Einschränkung sei daher \mathcal{I} equivariant über U_0 .

Auf der Menge der kohärenten Ideale auf F_0 , die über U_0 equivariant sind, operieren die 2-Automorphismengruppen $\Gamma_i = 2\text{-Aut}_F(t_i)$. Weiterhin ist das Ideal \mathcal{I} genau dann equivariant, wenn es unter den Γ_i -Operationen invariant ist.

Man kann daher das gesuchte equivariante kohärente Ideal \mathcal{J} definieren durch

$$\mathcal{J} := \prod_{\alpha \in \Gamma_1} \alpha^* \mathcal{I} \cdots \prod_{\alpha \in \Gamma_n} \alpha^* \mathcal{I}.$$

□

Nun geht es zurück zu dem Beweis der Proposition.

Man sieht, dass F genau dann keine Selbstüberschneidung hat, wenn gilt:

Für alle Punkte $t_0, t_1 \in V$, die gemeinsam in einer affinen Umgebung liegen, ist jeder 2-Isomorphismus $\alpha : t_0 \Rightarrow t_1$ trivial, d.h. es ist $t_0 = t_1$ und α ist die Identität.

Mit Hilfe von Lemma 1.4.15 reduziert man den Beweis leicht auf den affinen Fall

$$F_0 = \text{Spec}(M).$$

Die Fan-Aufblasung von F wird nun in zwei Schritten konstruiert:

1. Zuerst eliminiert man die nichttrivialen 2-Automorphismen $\alpha : t_0 \Rightarrow t_0$. Hierfür sei ohne Einschränkung $F = [\text{Spec}(M)/\Gamma]$ mit einer endlichen Gruppe $\Gamma \subset \text{Aut}(M)$.
2. Dann eliminiert man die nichttrivialen 2-Isomorphismen $\alpha : t_0 \Rightarrow t_1$ für Punkte $t_0 \neq t_1$, die gemeinsam in einer affinen Umgebung liegen.

1. Schritt Die Idee zu folgenden Ausführungen stammt von K. Kato (4.9 in [20]).

Es seien e_1, \dots, e_m die irreduziblen Elemente von M , die nach (1.1.5) das minimale Erzeugendensystem bilden. Man definiert das Ideal $I \subset M$ als das Produkt der Ideale

$$\langle e_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Dann ist I invariant unter Γ , denn Γ permutiert die irreduziblen Elemente e_i .

Man betrachtet nun die Fan-Aufblasung von F an dem Ideal I ,

$$F_I = [G_1 \rightrightarrows G_0],$$

einen Punkt $s \in G_0$ sowie den Halm der Strukturgarbe $M_s := \mathcal{M}_{G_0, s}$ und die zugehörige Grothendieckgruppe M_s^{gp} . Die kanonische Abbildung

$$\pi : M^{\text{gp}} \rightarrow M_s^{\text{gp}}$$

ist surjektiv. Insbesondere wird M_s^{gp} von den $\pi(e_i)$ erzeugt.

Man betrachte nun die 2-Automorphismengruppe in dem Punkt s

$$\tilde{\Gamma} = 2\text{-Aut}_G(s).$$

$\tilde{\Gamma}$ ist eine Untergruppe von Γ und operiert auf dem Halm M_s^{gp} . Man muß zeigen, dass diese Operation trivial ist oder äquivalent hierzu, dass die $\pi(e_i)$ fix sind unter $\tilde{\Gamma}$.

Nach Konstruktion der obigen Fan-Aufblasung gilt für $d = \pi(e_i/e_j)$

$$d \in M_s \text{ oder } d^{-1} \in M_s.$$

Ohne Einschränkung nimmt man $d \in M_s$ an. Dann gilt für ein Element $\alpha \in \tilde{\Gamma}$

$$d \cdot \alpha(d) \cdots \alpha^{n-1}(d) = 1,$$

wenn n die Ordnung von α ist. Weil M_s scharf ist, folgt $d = 1$ und somit ist

$$\alpha(\pi(e_i)) = \pi(e_i).$$

2. Schritt Man kann annehmen, dass alle 2-Automorphismen von F trivial sind. Die 2-Isomorphismen induzieren Isomorphismen von Zellen des Polyederkegelkomplexes

$$\Sigma = F(\mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Es gilt eine equivariante projektive rationale Unterteilung Σ' von Σ zu konstruieren, die alle isomorphen Zellen σ_1, σ_2 von Σ mit $\sigma_1 \neq \sigma_2$ trennt (siehe 1.3.5). Letzteres bedeutet, dass die Polyederkegel σ_i in keiner Zelle von Σ' liegen.

Mit Hilfe von Lemma 1.4.15 ist die Konstruktion einer solchen Unterteilung trivial.

Damit ist Proposition 1.4.14 vollständig bewiesen. □

Beispiel 1.4.16. 1.) Es sei F der affine Fächer $\text{Spec}(M)$ mit $M = \mathbb{N}^2$. Es ist

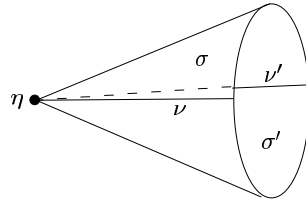
$$\text{Aut}(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

und man definiert den Fächer mSü F als den reduzierten Quotienten

$$[F/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})]^{\text{red}}$$

(siehe Beispiel 1.4.7). Man betrachtet nun die wohldefinierte reduzierte Fan-Aufblasung $(F_{M^+})^{\text{red}}$ an dem maximalen Ideal $M^+ \subset M$. Diese ist isomorph zu F .

2.) Andererseits betrachte man den Fächer m.S.ü. G in Beispiel 1.4.1. Auch hier ist die Fan-Aufblasung von G an dem maximalen Ideal M^+ wohldefiniert. $(G_{M^+})^{\text{red}}$ ist die Verklebung zweier Kopien von $\text{Spec}(M)$ und hat keine Selbstüberschneidung. Den Polyederkegelkomplex $(G_{M^+})^{\text{red}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ kann man wie folgt skizzieren



Kapitel 2

Logarithmische Geometrie

2.1 Log-Strukturen von Fontaine-Illusie

Eine *Log-Struktur* auf einem geringten Raum X besteht aus einer Garbe von Monoiden \mathcal{M}_X und einen Homomorphismus $\alpha_X : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, wobei \mathcal{O}_X als Monoid bzgl. der Multiplikation angesehen wird. Der Name Log-Struktur rührt daher, dass man α_X als Exponentialabbildung und \mathcal{M}_X als Logarithmen auffaßt.

Die logarithmische Geometrie ist eine Verallgemeinerung der Theorie der geringten Räume. Sie wurde von Fontaine, Illusie und Kato ins Leben gerufen, um tiefe Resultate in der kristallinen Kohomologietheorie zu beweisen [14]. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Strukturen in der logarithmischen Geometrie definiert.

Konvention. 1. Es sei im Folgenden $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ ein geringter Topos.

2. Morphismen zwischen geringten Topoi $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ seien immer zulässig, d.h. die Abbildung $f^\sharp : f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ respektiert die Einheitengruppen:

$$f^\sharp(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}^\times) \subset \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\times$$

Die topostheoretischen Grundlagen für diese Arbeit sind im Anhang A dargestellt.

2.1.1. - Eine *Prälog-Struktur* auf dem geringten Topos \mathbf{X} besteht aus einer Garbe von Monoiden $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ hierauf und einem Homomorphismus von Monoiden

$$\alpha_{\mathbf{X}} : \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}.$$

Hierbei wird $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ im Folgenden immer als multiplikativer Monoid betrachtet.

Ein *Prälog-Struktur* heißt eine *Log-Struktur*, wenn $\alpha_{\mathbf{X}}$ einen Isomorphismus induziert

$$\alpha_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\times.$$

- Für eine *Prälog-Struktur* $(\mathcal{M}_{\mathbf{X}}, \alpha_{\mathbf{X}})$ auf einem geringten Topos \mathbf{X} definiert man die assoziierte *Log-Struktur* $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}}, \widetilde{\alpha}_{\mathbf{X}})$ durch das kanonische kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^\times & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \\ \alpha_{\mathbf{X}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\times & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}} \end{array}$$

in der Kategorie der Garben von Monoiden auf \mathbf{X} . Hierbei ist

$$\tilde{\alpha}_{\mathbf{X}} : \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$$

induziert durch die kanonische Inklusion $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ und $\alpha_{\mathbf{X}} : \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$.

- Betrachtet man die Kategorien der Prälog-Strukturen auf einem festen Topos \mathbf{X} , so ist der Funktor der assoziierten Log-Struktur linksadjungiert zu dem Funktor der Inklusion von den Log-Strukturen in die Prälog-Strukturen.

Beispiel 2.1.2. Die triviale Log-Struktur auf einem geringten Topos \mathbf{X} ist

$$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^{\times} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}.$$

Beispiel 2.1.3. Sind X ein normales Schema, $U \subset X$ eine offene dichte Teilmenge und $D = X - U$ ihr Komplement, so definiert die Garbe von Monoiden

$$\mathcal{M}(\log D) := \mathcal{O}_X \cap \mathcal{O}_U^{\times},$$

mit der Inklusion $\mathcal{M}(\log D) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ eine Log-Struktur auf dem Zariski Topos von X .

2.1.4. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus geringter Topoi und \mathcal{M}_Y eine Log-Struktur auf Y , so ist die *Pullback Log-Struktur* $f^* \mathcal{M}_Y$ die assoziierte Log-Struktur zu

$$f^{-1} \mathcal{M}_Y \rightarrow f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Ist andererseits \mathcal{M}_X eine Log-Struktur auf \mathbf{X} , so erhält man auf \mathbf{X} eine *direkte Bild Log-Struktur* $f_*^{\log} \mathcal{M}_Y$. Diese ist assoziiert zu der Prälog-Struktur

$$f_* \mathcal{M}_Y \times_{f_* \mathcal{O}_X^{\times}} \mathcal{O}_Y^{\times} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\times}.$$

Die Funktoren f_*^{\log} , f^* sind adjungiert.

2.1.5. - Ein *log-geringter Topos* $\underline{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}, \mathcal{M}_{\mathbf{X}})$ besteht aus einem geringten Topos $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ zusammen mit einer Log-Struktur $\alpha_{\mathbf{X}} : \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ hierauf.

- Ein *Morphismus log-geringter Topoi*

$$(f, f_{\mathcal{M}}^{\sharp}) : (\mathbf{X}, \mathcal{M}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}, \mathcal{M}_{\mathbf{Y}})$$

besteht aus einem Morphismus geringter Topoi $f : X \rightarrow Y$ und einem Homomorphismus

$$f_{\mathcal{M}}^{\sharp} : f^* \mathcal{M}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{X}},$$

so dass ein kommutatives Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccc} f^* \mathcal{M}_{\mathbf{Y}} & \xrightarrow{f_{\mathcal{M}}^{\sharp}} & \mathcal{M}_{\mathbf{X}} \\ f^* \alpha_{\mathbf{Y}} \downarrow & & \downarrow \alpha_{\mathbf{X}} \\ f^* \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} & \xrightarrow{f^{\sharp}} & \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \end{array}$$

- Die log-geringten Topoi bilden auf offensichtliche Weise eine 2-Kategorie.

2.1.6. Ein Log-Schema \underline{X} besteht aus einem Schema X und einer Log-Struktur \mathcal{M}_X auf dem zugehörigen kleinen étalen Topos $X_{\text{ét}}$.

Nur zur Erinnerung: Der kleine étale Situs auf $\text{Ét}(X)$ hat als Objekte étale Morphismen von Schemata $U \rightarrow X$. Die Morphismen sind die offensichtlichen. Die Topologie auf $\text{Ét}(X)$ wird erzeugt von allen epimorphen étalen Familien $(U_i \rightarrow U)$. Den Topos $X_{\text{ét}}$ definiert man als die Kategorie der Garben auf $\text{Ét}(X)$.

Konvention. Die Log-geringten Topoi sind im Folgenden die unterstrichenen Größen. Auf die Angabe der zusätzlichen Strukturdaten $\mathcal{O}_X, \mathcal{M}_X, \alpha_X$ wird verzichtet.

2.1.7. - Die Charakteristik einer Log-Struktur \mathcal{M}_X ist definiert als

$$\overline{\mathcal{M}}_X := \mathcal{M}_X / \mathcal{M}_X^\times.$$

- Es ist $(\underline{X}, \overline{\mathcal{M}}_X)$ ein monoidaler Topos (siehe Definition 1.4.3) und

$$(\underline{X}, \mathcal{M}_X) \mapsto (\underline{X}, \overline{\mathcal{M}}_X)$$

ist ein 2-Funktor von den log-geringten Topoi in die monoidalen Topoi.

Konvention. Ein log-geringter Topos trägt immer die kanonische monoidale Struktur.

Auch wenn der Zusammenhang zwischen den log-geringten Topoi und monoidalen Topoi trivial ist, so ist er auch sehr wichtig. Denn viele Definitionen und Aussagen über log-geringte Topoi beziehen sich nur auf die monoidale Struktur.

Dies sieht man zum Beispiel an der folgenden Definition:

- Ein Morphismus log-geringter Topoi $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ heißt strikt, wenn die Abbildung

$$f_{\mathcal{M}}^\sharp : f^* \mathcal{M}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X$$

ein Isomorphismus ist, d.h. Y trägt die Pullback Log-Struktur.

Hierzu äquivalent ist, dass die induzierte Abbildung monoidaler Topoi

$$\overline{f} : (\underline{X}, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow (\underline{Y}, \overline{\mathcal{M}}_Y)$$

im Sinne der alten Definition 1.4.4 strikt ist. Denn es gilt kanonisch

$$\overline{f^* \mathcal{M}_Y} \simeq f^{-1} \overline{\mathcal{M}}_Y.$$

Beispiel 2.1.8. Es seien X ein Schema und π ein globaler Schnitt in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, der im Folgenden *Parameter* genannt wird. Man erhält eine Prälog-Struktur $\pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ und definiert \mathcal{M}_X als die assoziierte Log-Struktur.

Die Halme $\mathcal{M}_{X,x}$, $x \in X$ kann man in zwei Klassen unterteilen:

1. $\pi \in \mathcal{O}_{X,x}^\times \Rightarrow \mathcal{M}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}^\times$
2. $\pi \notin \mathcal{O}_{X,x}^\times \Rightarrow \mathcal{M}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}^\times \oplus \pi^{\mathbb{N}}$.

Explizit erwähnt seien die folgenden Spezialfälle:

- Für die *Standard Log-Struktur* auf einem diskreten Bewertungsring (R, π) wählt man in obiger Situation den uniformisierenden Parameter π .
- Für die *Standard Log-Struktur* auf einem Körper k wählt man in obiger Situation den Parameter $\pi = 0$. In dieser Situation ist somit in suggestiver Notation

$$\mathcal{M}_k = \pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}.$$

Konvention. *Im Folgenden werden log-geringte Topoi, welche die triviale Log-Struktur tragen, mit dem unterliegenden Topos identifiziert.*

Bemerkung 2.1.9. 1. *Es existieren alle (Faser)Produkte von Log-Schemata.*

Für Abbildungen $\underline{X}_i \rightarrow \underline{S}$, $i = 1, 2$ ist das unterliegende Schema von

$$\underline{X}_1 \times_{\underline{S}} \underline{X}_2$$

das schematische Faserprodukt $X_1 \times_S X_2$. Die Log-Struktur ist assoziiert zu

$$p_1^* \mathcal{M}_{X_1} \oplus_{p^* \mathcal{M}_S} p_2^* \mathcal{M}_{X_2} \rightarrow \mathcal{O}_{X_1 \times_S X_2},$$

wobei $p_i : X_1 \times_S X_2 \rightarrow X_i$, $p : X_1 \times_S X_2 \rightarrow S$ die Projektionen sind.

2. Das finale Objekt in der Kategorie der log-geringten Topoi ist $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

2.2 Kohärente Log-Strukturen

Die Log-Schemata mit *kohärenter Log-Struktur* bilden eine geeignete Unterkategorie, in der sich gut *algebraische Log-Geometrie* betreiben läßt. In diesem Abschnitt wird der Begriff der kohärenten Log-Struktur auf geringte Topoi verallgemeinert.

Auch wenn in den Anwendungen Log-Schemata im Vordergrund stehen, so bilden die kohärenten log-geringten Topoi eine geeignete Kategorie, um die Kombinatorik von Log-Strukturen im nächsten Abschnitt funktoriell zu untersuchen.

Konvention. 1. *Im Folgenden sei \underline{X} immer ein log-geringter Topos.*

2. *Für eine Menge S bezeichnet man der Einfachheit halber die induzierte konstante Garbe auf \underline{X} ebenfalls mit S , ohne den Leser zu verwirren.*

Definition 2.2.1. *Es sei $\underline{X} = (\mathbf{X}, \mathcal{M}_{\mathbf{X}})$ ein log-geringter Topos.*

1. *Eine Karte von \underline{X} besteht aus einem Monoid M und einer Prälog-Struktur*

$$\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}},$$

so dass $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ die assoziierte Log-Struktur ist.

2. Eine Karte eines Morphismus log-geringter Topoi $f : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ besteht aus Karten

$$M \rightarrow \mathcal{M}_X, N \rightarrow \mathcal{M}_Y$$

und einer Abbildung $N \rightarrow M$, so dass ein kommutatives Diagramm existiert:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\beta} & f^* \mathcal{M}_Y \\ \downarrow & & \downarrow f_{\mathcal{M}}^{\#} \\ M & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_X \end{array}$$

3. Die Log-Struktur \mathcal{M}_X heißt quasikohärent (bzw. kohärent/ausgezeichnet/fs), wenn sie lokal bzgl. der kanonischen Topologie (siehe A.0.4) eine Karte besitzt (die auf einem endlich erzeugten/ausgezeichneten/fs Monoid modelliert ist).

4. Eine Karte einer \mathcal{M}_X -Garbe \mathcal{A} besteht aus einer Karte der Log-Struktur $M \rightarrow \mathcal{M}_X$ und einer M -Menge A , so dass ein Isomorphismus existiert

$$A \otimes_M \mathcal{M}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}.$$

5. Eine \mathcal{M}_X -Garbe \mathcal{A} heißt quasikohärent (bzw. kohärent), wenn sie lokal eine Karte besitzt (die auf einer endlich erzeugten Monoid-Menge modelliert ist).

Bemerkung 2.2.2. Für ein Log-Schema \underline{X} stimmt die Definition der Kohärenz mit der üblichen überein: Es ist \mathcal{M}_X genau dann kohärent, wenn eine étale Überdeckung $U \rightarrow X$ existiert, so dass die zurückgezogene Log-Struktur \mathcal{M}_U eine Karte besitzt.

Die nächste Proposition faßt einige elementare Eigenschaften kohärenter Log-Schemata zusammen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden.

Proposition 2.2.3. Es sei \underline{X} ein kohärentes Log-Schema.

1. Der Vergeß-Funktor von den \mathcal{O}_X -Moduln in die \mathcal{M}_X -Garben, vermöge der Abbildung $\alpha_X : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, hat einen linksadjungierten Funktor

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{A}.$$

2. Eine (quasi)kohärente \mathcal{M}_X -Garbe \mathcal{A} liefert einen (quasi)kohärenten \mathcal{O}_X -Modul

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{A}.$$

3. Der Funktor der Inklusion von den fs Log-Schemata in die kohärenten Log-Schemata hat einen rechtsadjungierten Funktor $\underline{X} \mapsto \underline{X}^{\text{sat}}$.

4. In der Kategorie der fs Log-Schemata existieren alle (Faser)Produkte.

Beweis. Zu 1.) Für einen Monoid M und eine Prälog-Struktur $M \rightarrow R$ auf einem Ring ist der Vergeß-Funktor von den R -Moduln in die M -Mengen rechtsadungiert zu

$$A \mapsto A \otimes_M R := R \otimes_{\mathbb{Z}[M]} \mathbb{Z}^{(A)} \quad \text{mit}$$

$$\mathbb{Z}^{(A)} := \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a \cdot a; \lambda_a \in \mathbb{Z} \right\},$$

wobei $\lambda_a = 0$ ist für fast alle $a \in A$. Hieraus erhält man die Behauptung.

Zu 2.) Bekanntlich ist jedes étale Abstiegsdatum für einen quasikohärenten \mathcal{O}_X -Modul effektiv (Theorem 4 in [5], Kap 6). Man kann folglich ohne Einschränkung annehmen, dass $X = \text{Spec}(R)$ affin ist und dass Karten existieren

$$M \rightarrow \mathcal{M}_X, \quad A \rightarrow \mathcal{A}.$$

Dann ist $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{A}$ induziert durch den R -Modul $A \otimes_M R$ und die Behauptung folgt.

Zu 3.) Dies folgt aus 2.), indem man die Saturierung von \mathcal{M}_X bildet:

$$\underline{X}^{\text{sat}} := \text{Spec}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_X^{\text{sat}}),$$

wobei die Log-Struktur assoziiert ist zu

$$\mathcal{M}_X^{\text{sat}} \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_X^{\text{sat}}.$$

Die letzte Behauptung folgt aus 3.) und Bemerkung 2.1.9, indem man von dem Faserprodukt kohärenter Log-Schemata die Saturierung bildet. \square

Bemerkung 2.2.4. Es seien $\underline{X}_i \rightarrow \underline{S}$ Abbildungen von fs Log-Schemata, die Karten besitzen $M_i \rightarrow \mathcal{M}_{X_i}$, $N \rightarrow \mathcal{M}_S$, $N \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$. Das fs Faserprodukt

$$\underline{X}_1 \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{X}_2$$

konstruiert man wie folgt: Das unterliegende Schema ist definiert durch

$$(X_1 \times_S X_2) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[N])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[(M_1 \oplus_N M_2)^{\text{sat}}]),$$

Die Log-Struktur ist assoziiert zu der kanonischen Prälog-Struktur.

Die nächste Proposition zeigt, dass sich quasikohärente Log-Strukturen lokal durch solche auf topologischen Räumen beschreiben lassen:

Proposition 2.2.5. *Es sei \underline{X} ein quasikohärenter log-geringter Topos mit genügend vielen Punkten (siehe A.0.6), dessen Log-Struktur eine Karte besitzt.*

Man betrachtet den kanonischen Morphismus von Topoi in A.0.6

$$\varepsilon_X : \mathbb{X} \rightarrow \text{Sh}(T) \quad \text{mit} \quad T := \text{Pt}(\mathbb{X}).$$

Dann liefert die Adjunktion der Funktoren $\varepsilon_{X,}^{\text{log}}$, ε_X^* in 2.1.4 einen Isomorphismus*

$$\eta : \varepsilon_X^* \mathcal{M}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}_T := \varepsilon_{X,*}^{\text{log}} \mathcal{M}_X.$$

Hierbei trägt der Raum T die direkte Bild geringte Struktur $\mathcal{O}_T := \varepsilon_{X,} \mathcal{O}_X$, so dass die Garbe \mathcal{M}_T mit dem gewöhnlichen direkten Bild $\varepsilon_{X,*} \mathcal{M}_X$ übereinstimmt.*

Beweis. Man wählt eine Karte $\alpha : M \rightarrow \mathcal{M}_X$ und betrachtet die induzierte Abbildung

$$\beta : M \rightarrow \mathcal{M}_T.$$

Man sieht, dass die Urbildgarbe $\alpha^{-1}(\mathcal{M}_X^\times)$ isomorph ist zu der disjunkten Vereinigung

$$\coprod_{m \in M} \mathcal{U}_m$$

einer Familie von Untergarben \mathcal{U}_m der konstanten Garbe 1_X . Weil der Morphismus ε_X eine Bijektion herstellt zwischen den Untergarben von 1_X und offen Mengen in T , ist die Urbildgarbe $\alpha^{-1}(\mathcal{M}_X^\times)$ isomorph zu dem inversen Bild von $\beta^{-1}(\mathcal{M}_T^\times)$ unter ε_X .

Dann sieht man, dass β eine Karte von \mathcal{M}_T ist und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 2.2.6. Für den Spezialfall eines Log-Schemas siehe Proposition 2.4.6.

2.3 Kombinatorik kohärenter Log-Strukturen

Das Hauptresultat in diesem Abschnitt ist Theorem 2.3.2. *Hiernach kann man einem log-geringsten Topos funktoriell einen Fächer mit Selbstüberschneidung zuordnen.* Mit seiner Hilfe kann man die Kombinatorik kohärenter Log-Strukturen effektiv untersuchen.

Für ein log-reguläres Zariski Log-Schema stammt diese Konstruktion von Kato (siehe Beispiel 2.3.7). Katos Konstruktion verallgemeinert die Korrespondenz zwischen rationalen Polyederkegelkomplexen und toroidalen Einbettungen in [22].

Konvention. 1. *Alle Topoi seien lokal noethersch (Definition 2.11 in [47], Exposé VI).*

Hierbei benötigt man nicht die explizite Definition von lokaler Noetherzität, die entscheidenden Eigenschaften für diese Arbeit sind vielmehr:

- (a) *Der Topos X hat genügend viele Punkte (siehe A.0.6).*
 - (b) *Für jede Garbe \mathcal{F} auf X mit zugehörigem Index-Topos $X_{/\mathcal{F}}$ ist der topologische Raum der Punkte $\text{Pt}(X_{/\mathcal{F}})$ lokal noethersch (siehe A.0.4, A.0.6).*
2. *Alle Log-Strukturen sind im Folgenden kohärent (Definition 2.2.1).*
3. *Alle strikten Gruppoide von Fächern sind lokal von endlichem Typ. Dann sind die zugehörigen Topoi insbesondere lokal noethersch.*

Beispiel 2.3.1. Für ein lokal noethersches Schema X ist der kleine étale Topos $X_{\text{ét}}$ lokal noethersch. Dies erhält man aus (Kapitel 3 in [47], Exposé VII).

Theorem 2.3.2. *Es sei X ein lokal noetherscher kohärenter Log-geringster Topos.*

Dann existieren ein Fächer $mSü F(X)$ und ein Morphismus monoidaler Topoi

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(F(X)),$$

der eindeutig bestimmt ist durch die folgenden Eigenschaften:

1. Es ist f_X ein strikter Morphismus monoidaler Topoi.
2. Der inverse Bildfunktor f_X^{-1} stellt eine eindeutige Korrespondenz her zwischen den (quasi)kohärenten (Bruch)Idealen von \mathcal{M}_X und $\mathcal{M}_{F(\underline{X})}$.
3. Für jeden Fächer $mSü G$ faktorisiert jeder strikte Morphismus monoidaler Topoi

$$g : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(G)$$

über einen eindeutigen Morphismus monoidaler Topoi

$$f : \text{Sh}(F(\underline{X})) \rightarrow \text{Sh}(G).$$

Zusammen mit Proposition 1.4.8 erhält man hieraus:

Korollar 2.3.3. Die Zuordnung $\underline{X} \mapsto F(\underline{X})$ ist ein Funktor von den lokal noetherschen log-geringten Topoi mit strikten Morphismen in die strikten Gruppoide von Fächern.

Definition 2.3.4. Es heißt $F(\underline{X})$ der assoziierte Fächer mit Selbstüberschneidung.

Der Leser stellt sich sicherlich die Frage, warum das Theorem so allgemein und abstrakt für monoidale Topoi formuliert wurde. Der Grund liegt darin, dass man

$$\underline{X} \longmapsto F(\underline{X})$$

als rechtsadjungierten Funktor auffassen kann.

Hierfür muß man die Situation noch etwas verallgemeinern:

- Man betrachtet monoidale Topoi (X, \mathcal{M}_X) , so dass \mathcal{M}_X lokal isomorph ist zu

$$\overline{\mathcal{S}^{-1}M},$$

wobei M ein endlich erzeugter konstanter Monoid ist unter \mathcal{S} ein Untermonoid.

Solche monoidalen Topoi nennt man dann kohärent. Dann stellt man fest: Kohärente log-geringte Topoi und strikte Gruppoide von Fächern induzieren auf kanonische Weise kohärente monoidale Topoi. Das Theorem 2.3.2 hat nun die folgende elegantere Form:

Theorem 2.3.5. Die Inklusion der strikten Gruppoide von Fächern in die kohärenten monoidalen Topoi mit den strikten Morphismen hat einen rechtsadjungierten Funktor.

Der Beweis von Theorem 2.3.2 wird fast den gesamten Abschnitt in Anspruch nehmen. Es folgen zunächst eine ganze Reihe von Vorbereitungen.

Definition 2.3.6. Es sei T ein beliebiger topologischer Raum.

1. Eine Stratifizierung von T ist eine disjunkte, lokal endliche Zerlegung in lokal abgeschlossene Teilmengen D_j , die Strata heißen.
2. Man schreibt $D_i \rightsquigarrow D_j$ und sagt D_j ist eine Spezialisierung von D_i , wenn für den topologischen Abschluß von D_i in T gilt

$$D_i^{\text{cls}} \cap D_j \neq \emptyset.$$

3. Eine Stratifizierung erfüllt der Axiom of Frontier, wenn der topologische Abschluß eines jeden Stratum die Vereinigung gewisser Strata ist.

Die Konstruktion von $F(\underline{X})$ wird an Beispielen erläutert:

Beispiel 2.3.7. Man betrachtet ein *log-reguläres Zariski Log-Schema* \underline{X} .

Nach Kato [18] heißt hierbei ein noethersches fs Log-Schema \underline{X} *log-regulär*, wenn in allen geometrischen Punkten \bar{x} von X gilt:

1. Der lokale Ring $A = \mathcal{O}_{X,\bar{x}} / \langle \mathcal{M}_{X,\bar{x}}^+ \rangle$ ist regulär.
2. Es gilt $\dim(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \dim(A) + \text{Rang}(\mathcal{M}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}})$.

Weiterhin heißt eine Log-Struktur auf einem Schema *Zariski*, wenn sie bereits auf dem Zariski-Topos definiert ist (siehe Definition 2.4.5).

In dieser Situation ist $F(\underline{X})$ ein gewöhnlicher Fächer und der Morphismus

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow F(\underline{X})$$

ist eine Abbildung monoidaler Räume (siehe Theorem 2.4.9).

Details und Beweise für die folgenden Ausführungen findet man in [18].

Zunächst sieht man, dass X Cohen-Macaulay und normal ist und dass

$$E = \{x \in X ; \mathcal{M}_{X,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

ein Weildivisor in X ist. In der Notation von Beispiel 2.1.3 gilt für die Log-Struktur

$$\mathcal{M}_X = \mathcal{M}(\log E).$$

Es besitzt X eine kanonische Stratifizierung (D_j) : Es existiert ein offenes Stratum $X - E$. Sind weiterhin E_i die irreduziblen Komponenten von E , so sind die übrigen Strata die Komponenten aller möglichen Schnittgebilde

$$\bigcap_{k \in \{i_1, \dots, i_r\}} E_k - \bigcup_{l \notin \{i_1, \dots, i_r\}} E_l.$$

Man kann zeigen, dass die Stratifizierung das Axiom of Frontier erfüllt. Weiterhin ist die Charakteristik auf jedem Stratum konstant.

Den assoziierten Fächer $F(\underline{X})$ konstruiert man wie folgt. Der topologische Raum ist die Menge aller generischen Punkte der Strata mit der Relativtopologie. Die Strukturgarbe ist das Pullback von $\overline{\mathcal{M}}_X$ unter der Inklusion $F(\underline{X}) \hookrightarrow X$.

Weiterhin schickt die universelle Abbildung monoidaler Räume

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow F(\underline{X})$$

einen Punkt $x \in X$ auf das Stratum, das x enthält.

Beispiel 2.3.8. Es sei \underline{X} ein zusammenhängender, lokal noetherscher log-geringter Topos mit lokal konstanter Charakteristik (siehe A.0.8). Fixiert man einen geometrischen Punkt \bar{x} von \underline{X} , so ist die Charakteristik nach A.0.9 bestimmt durch die Operation

$$\pi_1(\underline{X}, \bar{x}) \rightarrow \text{Aut}(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}, \bar{x}}).$$

Man definiert dann den assoziierten Fächer mSü als den reduzierten Quotienten

$$F(\underline{X}) := [\text{Spec}(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}, \bar{x}}) / \pi_1(\underline{X}, \bar{x})]^{\text{red}}$$

(siehe Beispiel 1.4.7). Dann existiert ein kanonischer Funktor

$$f_{\underline{X}}^{-1} : \text{Sh}(F(\underline{X})) \rightarrow \mathbf{X}_{\text{lc}}.$$

Dieser ist der inverse Bild Funktor des universellen Morphismus

$$f_{\underline{X}} : (\underline{X}, \overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}}) \rightarrow \text{Sh}(F(\underline{X})).$$

Die nächste Proposition faßt einige kombinatorische Eigenschaften eines kohärenten log-geringten Topos zusammen, die im Folgenden eine Rolle spielen.

Proposition 2.3.9. *Es sei \underline{X} ein kohärenter, lokal noetherscher log-geringter Topos.*

1. Für jeden Monoid M ist die Teilmenge von $\text{Pt}(\underline{X})$

$$\{x \in \text{Pt}(\underline{X}); \overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}, x} \simeq M\},$$

lokal abgeschlossen und lokal zusammenhängend (siehe A.0.6). Die Komponenten dieser Mengen bilden somit eine Stratifizierung (D_j) von $\text{Pt}(\underline{X})$.

2. Es ist $\overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}}$ eine konstruierbare Garbe auf \underline{X} (siehe A.0.8).

3. Die Aussagen 1.) - 3.) gelten auch für jeden Index-Topos $\mathbf{X}_{/\mathcal{U}}$.

Definition 2.3.10. *Es heißt (D_j) die kanonische Stratifizierung von $\text{Pt}(\underline{X})$.*

Beweis. Zu 1.) Weil \underline{X} lokal noethersch ist, reicht es zu zeigen, dass die Teilmenge

$$\{x \in \text{Pt}(\underline{X}); \overline{\mathcal{M}}_{\underline{X}, x} \simeq \overline{f^{-\mathbb{N}}M} \text{ für ein } f \in M\}$$

offen ist. Nun ist für eine Garbe \mathcal{U} auf \underline{X} die kanonische Abbildung

$$\text{Pt}(\mathbf{X}_{/\mathcal{U}}) \rightarrow \text{Pt}(\underline{X})$$

offen (siehe Proposition 5.12 in [47], Exposé IV). Daher kann man annehmen, dass die Log-Struktur $\mathcal{M}_{\underline{X}}$ eine Karte besitzt. Dann ist die Behauptung aber evident.

Zu 2.) Dies ist klar, denn die Einschränkungen der Charakteristik auf die lokal abgeschlossenen Untertopoi von \underline{X} zu den Strata von $\text{Pt}(\underline{X})$ sind lokal konstant.

Die letzte Aussage ist klar. □

Beispiel 2.3.11. Es sei X das affine Schema zu dem Ring

$$R = \mathbb{C}[x, y]/(x \cdot y).$$

Ferner sei \mathcal{M}_X die assoziierte Log-Struktur zu $\mathbb{N} \rightarrow R$, $1 \mapsto x$. Dann hat X nur zwei Strata. Das abgeschlossenen Stratum D_0 ist definiert durch das Ideal $\langle x \rangle$. Das offene Stratum ist das Komplement $D_1 = X - D_0$. Insbesondere gilt

$$D_0 \not\subset D_1^{\text{cls}} = R/\langle y \rangle$$

und somit erfüllt die Stratifizierung nicht das Axiom of Frontier.

Das nächste Lemma hat eine Schlüsselfunktion für den Beweis von Theorems 2.3.2.

Lemma 2.3.12. *Es sei F ein Fächer $mSü$ und \mathcal{F} eine Garbe auf F .*

Dann existieren eine Familie (\mathcal{U}_i) von Garben auf F der Form

$$\mathcal{U}_i \subset \mathcal{M}_F^n, n \in \mathbb{N}$$

und ein Epimorphismus von Garben

$$\coprod_i \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{F}.$$

Man sagt hierzu, dass der Topos $\text{Sh}(F)$ von \mathcal{M}_F erzeugt wird.

Beweis. Zunächst beachte man, dass man $F = \text{Sh}(F)$ durch einen Index Topos F/\mathcal{U} (siehe A.0.4) für eine Untergarbe $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_F^n$ ersetzen kann. Denn der inverse Bild Funktor zu dem kanonischen Morphismus $\varphi_{\mathcal{U}} : F/\mathcal{U} \rightarrow F$ (A.0.4) ist von der Form

$$\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \times \mathcal{U}.$$

Der entscheidende Schritt ist nun solch ein \mathcal{U} zu finden, so dass der monoidale Topos

$$(F/\mathcal{U}, \mathcal{M}_{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{M}_F)$$

isomorph ist zu $\text{Sh}(F)$ mit einem Fächer F . Denn dann ist die Behauptung trivial.

Nun besitzt die Strukturgarbe $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ für ein $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_F^n$ über F/\mathcal{U} tautologische Schnitte

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_F \times \mathcal{U}$$

Weil F lokal von endlichem Typ ist, findet man eine Überdeckung der konstanten Garbe 1_F mit Untergarben $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_F^n$, so dass die Strukturgarbe $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ von den tautologischen Schnitten erzeugt wird (siehe Proposition 5.12 in [47], Exposé IV).

Man weiß weiterhin, dass $(F/\mathcal{U}, \mathcal{M}_{\mathcal{U}})$ ein Fächer Étendue ist und nach Proposition 1.4.8 somit isomorph ist zu $\text{Sh}(U)$ mit U einem Gruppoid von Fächern. Ferner ist mit F auch U als Gruppoid von Fächern reduziert (siehe Definition 1.4.11).

Weil $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird, hat U keine Selbstüberschneidung. Somit ist U ein Fächer und die Behauptung folgt. \square

Der Beweis von Theorem 2.3.2 wird nun in zwei Schritten erbracht:

1. Zunächst nimmt man an, dass die Log-Struktur eine Karte besitzt.
2. Dann läßt man diese Voraussetzung fallen.

1. Schritt Der Beweis von Theorem 2.3.2 falls \mathcal{M}_X eine Karte besitzt.

Zuerst die Konstruktion des assoziierten Fächers und der universellen Abbildung.

Konstruktion 2.3.13. Man befindet sich in der folgenden Situation:

- Die gegebene Karte $\alpha : M \rightarrow \mathcal{M}_X$ induziert einen Epimorphismus

$$\bar{\alpha} : M \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_X.$$

- Nach Proposition 2.2.5 steigt $\overline{\mathcal{M}}_X$ kanonisch nach $T := \text{Pt}(X)$ ab.
- Die kanonische Stratifizierung (D_j) von T hat folgende Eigenschaften:

Die Strata D_j sind zusammenhängend und lokal abgeschlossen. Weiterhin ist die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_T$ auf D_j konstant und entspricht somit einem Monoid M_j .

Die einzelnen Monoide M_j kann man nun wie folgt zueinander in Relation setzen:

Es seien zwei Strata D_1, D_2 gegeben, so dass gilt $D_1 \rightsquigarrow D_2$ (siehe Definition 2.3.6).

Dann betrachtet man die durch $\bar{\alpha}$ induzierten Abbildungen $\alpha_i : M \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$. Diese stellen Isomorphismen her $\overline{\text{Ker}(\alpha_i)^{-1}M} \xrightarrow{\sim} M_i$. Für die Kerne gilt

$$\text{Ker}(\alpha_2) \subset \text{Ker}(\alpha_1).$$

Zusammengefaßt erhält man eine kanonische *Kospezialisierung*

$$\alpha_{i,j}^\sharp : M_j \longrightarrow M_i,$$

die einen Isomorphismus herstellt $M_j / \text{Ker}(\alpha_{i,j}^\sharp) \xrightarrow{\sim} M_i$. Nach Übergang zu den Spektren erhält man daher kanonische offene Immersionen

$$\alpha_{ij} : \text{Spec}(M_i) \hookrightarrow \text{Spec}(M_j).$$

Durch Verklebung der $\text{Spec}(M_i)$ via der Abbildungen α_{ij} erhält man einen Fächer

$$F(\underline{X}) := \bigcup_i \text{Spec}(M_i).$$

Dass die Verklebung möglich ist, erhält man aus der Existenz des Epimorphismus $\bar{\alpha}$. Denn dieser ist kompatibel mit den Kospezialisierungen.

Es gilt nun den kanonischen Morphismus monoidaler Topoi zu konstruieren

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(F(\underline{X})).$$

Man definiert diesen als eine Verkettung

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \xrightarrow{\varepsilon_X} (\text{Sh}(T), \overline{\mathcal{M}}_T) \xrightarrow{\text{Sh}(f)} \text{Sh}(F(\underline{X})).$$

Der Morphismus $\text{Sh}(f)$ ist induziert durch eine Abbildung monoidaler Räume

$$f : (T, \overline{\mathcal{M}}_T) \rightarrow \text{F}(\underline{\mathbf{X}}).$$

Der topologische Teil von f schickt ein Stratum D_j auf den abgeschlossenen Punkt

$$M_j^+ \in \text{Spec}(M_j).$$

Nach Konstruktion ist die Abbildung f stetig.

Für die der Abbildung der Strukturgarben benutzt man, dass $\mathcal{M}_{\text{F}(\underline{\mathbf{X}})}$ und $\overline{\mathcal{M}}_T$ Quotienten von M sind. Man sieht, dass eine eindeutige Abbildung existiert

$$f^\sharp : f^{-1}\mathcal{M}_{\text{F}(\underline{\mathbf{X}})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_T,$$

die ein kommutatives Diagramm herstellt:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_T \\ \parallel & & \uparrow f^\sharp \\ M & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{M}_{\text{F}(\underline{\mathbf{X}})} \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen:

Proposition 2.3.14. *Der Morphismus $f_{\mathbf{X}}$ hat die Eigenschaften in Theorem 2.3.2.*

Beweis. Die Striktheit von $f_{\mathbf{X}}$ folgt aus der Konstruktion.

Zu 2.) Für ein kohärentes Ideal \mathcal{I} von $\mathcal{M}_{\text{F}(\underline{\mathbf{X}})}$ wird das inverse Bild

$$\overline{\mathcal{J}} = f_{\mathbf{X}}^{-1}\mathcal{I}$$

lokal von Schnitten von $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}}$ erzeugt. Dasselbe gilt für das Urbild \mathcal{J} unter der kanonischen Projektion $\mathcal{M}_{\mathbf{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}}$. Somit ist \mathcal{J} ein kohärentes Ideal.

Umgekehrt induziert ein kohärentes Ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ eine Familie von Idealen

$$\mathcal{I}_j \subset M_j,$$

die stabil ist unter den Kospezialisierungen $\alpha_{i,j}^\sharp$. Somit verkleben die \mathcal{I}_j zu einem Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_{\text{F}(\underline{\mathbf{X}})}$. Hierdurch erhält man eine eindeutige Korrespondenz.

Für (quasi)kohärente (Bruch)Ideale beweist man die Korrespondenz ganz analog.

Zu 3.) Es sei ein strikter Morphismus monoidaler Topoi gegeben

$$g : (\mathbf{X}, \overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \text{Sh}(G).$$

Man betrachtet die durch g induzierte stetige Abbildung

$$|g| : T = \text{Pt}(\mathbf{X}) \rightarrow \text{Pt}(\text{Sh}(G)) = |G|. \quad (2.1)$$

Hierbei ist $|G|$ der unterliegende topologische Raum von G (siehe A.0.2). Dass $\text{Pt}(\text{Sh}(G))$ kanonisch homeomorph zu $|G|$ ist, erhält man aus Proposition A.0.15.

Nun sind die Strata D_j zusammenhängend und die Charakteristik ist auf ihnen konstant. Somit bestehen die Bilder der Strata $g|(D_i)$ nur aus einem Punkt.

Daraus folgt, dass für jede Garbe \mathcal{F} auf G das inverse Bild $g|_{D_j}^{-1}\mathcal{F}$ lokal konstant ist. Hierbei ist $g|_{D_j}$ in der Notation von A.0.8 die Komposition von Morphismen

$$\mathbf{X}_{D_j} \hookrightarrow \mathbf{X} \xrightarrow{g} \mathbf{Sh}(G).$$

Nun kommt endlich Lemma 2.3.12 zum Tragen. Hiernach kann man jede Garbe \mathcal{F} auf G darstellen als Quotient einer disjunkten Vereinigung von Untergarben

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_G^n, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist wegen der Striktheit von g das inverse Bild $g|_{D_j}^{-1}\mathcal{F}$ konstant.

Zusammengefaßt erhält man, dass $g|_{D_j}$ eine eindeutige Faktorisierung besitzt

$$g|_{D_j} : \mathbf{X}_{D_j} \rightarrow \mathbf{Sh}(F_j) \xrightarrow{f_j} \mathbf{Sh}(G)$$

mit $F_j = \text{Spec}(M_j)$ und $\mathbf{X}_{D_j} \rightarrow \mathbf{Sh}(F_j)$ dem kanonischen Morphismus.

Weiterhin sind die Morphismen f_j mit den Kospezialisierungen α_{ij}^\sharp in Konstruktion 2.3.13 verträglich. Somit erhält man durch Verklebung einen eindeutigen Morphismus

$$f : \mathbf{F}(\underline{\mathbf{X}}) \rightarrow G,$$

so dass g mit der Verkettung $f \circ f_{\mathbf{X}}$ übereinstimmt. □

2. Schritt Der Beweis von Theorem 2.3.2 im allgemeinen Fall.

Zuerst die Konstruktion des assoziierten Fächers und der universellen Abbildung.

Konstruktion 2.3.15. Es sei $\mathcal{U} \rightarrow 1_{\mathbf{X}}$ eine Überdeckung, so dass $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ über

$$\mathbf{X}' := \mathbf{X}_{/\mathcal{U}}$$

eine Karte besitzt. Das 2-kategorische Faserprodukt $\mathbf{X}' \times_{\mathbf{X}}^2 \mathbf{X}'$ ist isomorph zu

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{X}_{/\mathcal{U} \times \mathcal{U}}.$$

(siehe Proposition 5.11 in [47], Exposé IV). Man versieht \mathbf{X}' , \mathbf{X}'' mit den Pullback Log-Strukturen unter den kanonischen Morphismen nach \mathbf{X} . Man betrachtet nun das Diagramm

$$p_i : \mathbf{X}'' \rightrightarrows \mathbf{X}', \tag{2.2}$$

bestehend aus den kanonischen Projektionen. Dann besitzt auch $\mathcal{M}_{\mathbf{X}''}$ eine Karte.

Man kann daher nach Proposition 2.3.14 den Funktor $\mathbf{F}(\cdot)$ auf das Diagramm (2.2) anwenden und erhält ein striktes Diagramm von Fächern

$$\mathbf{F}(p_i) : \mathbf{F}(\mathbf{X}'') \rightrightarrows \mathbf{F}(\mathbf{X}').$$

Dieses Diagramm erzeugt nach Proposition 1.4.13 einen Fächer mSü

$$F(\underline{X}) := [s, t : F_1 \rightrightarrows F_0] \quad \text{mit} \quad F_0 = F(\underline{X}').$$

Die Konstruktion der universellen Abbildung ist nur noch ein formales Problem:

Es sei eine Garbe \mathcal{F} auf $F(\underline{X})$ gegeben. Diese ist eindeutig bestimmt durch eine Garbe \mathcal{F}_0 auf dem Objektraum F_0 zusammen mit einer F_1 -Operation

$$\psi : s^{-1}\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} t^{-1}\mathcal{F}_0.$$

Man bildet nun das inverse Bild $\mathcal{G}' := f_{X'}^{-1}\mathcal{F}_0$ unter dem universellen Morphismus

$$f_{X'} : X' \rightarrow F(\underline{X}').$$

Sind $p_i : X'' \rightarrow X'$ die Projektionen, so induziert ψ einen Isomorphismus

$$\varphi : p_1^{-1}\mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} p_2^{-1}\mathcal{G}'.$$

Man zeigt nun, dass der Isomorphismus φ die Kozykelbedingung erfüllt:

In dem Fall $\mathcal{F} = \mathcal{M}_G$ erfüllt φ die Kozykelbedingungen nach Konstruktion. Nach Lemma 2.3.12 erfüllt φ die Kozykelbedingungen dann auch für ein beliebiges \mathcal{F} .

Weil in einem Topos alle *Äquivalenzrelationen effektiv* sind (siehe Theorem 1.2 in [47], Exposé IV), hat man nach obigen Ausführungen einen kanonischen Funktor

$$f_X^{-1} : \text{Sh}(F(\underline{X})) \rightarrow X.$$

Mit dem Kriterium in (Proposition 4.9.4 in [47], Exposé IV) sieht man schließlich, dass f_X^{-1} der inverse Bild Funktor eines Morphismus von Topoi ist

$$f_X : X \rightarrow \text{Sh}(F(\underline{X})).$$

f_X hat eine kanonische Erweiterung zu einen Morphismus monoidaler Topoi

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(F(\underline{X})).$$

Es bleibt zu zeigen:

Proposition 2.3.16. *Der Morphismus f_X hat die Eigenschaften in Theorem 2.3.2.*

Beweis. Die Striktheit von f_X folgt aus der Konstruktion.

Zu 2.) Die eindeutige Korrespondenz zwischen den (quasi)kohärenten (Bruch)Idealen von $\mathcal{M}_{F(\underline{X})}$ und \mathcal{M}_X erhält man aus den entsprechenden Aussagen über X' .

Zu 3.) Für den Beweis der Universalität von f_X sei ein strikter Morphismus gegeben

$$g : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(G).$$

Man betrachtet nun das durch (2.2) und g induzierte Diagramm

$$g_1, g_2 : (X'', \overline{\mathcal{M}}_{X''}) \rightrightarrows (X', \overline{\mathcal{M}}_{X'}) \rightarrow \text{Sh}(G).$$

Trivialerweise sind die Morphismen g_1, g_2 2-isomorph und das Diagramm ist strikt. Durch Anwendung von $F(\cdot)$ erhält man das strikte Diagramm von Fächern

$$F(g_i) : F(\underline{X}'') \rightrightarrows F(\underline{X}') \rightarrow G \quad \text{mit} \quad F(g_1) = F(g_2). \quad (2.3)$$

Wegen der Universalität des erzeugten Fächers mSü in Proposition 1.4.13 existiert eine eindeutige Abbildung $f : F(\underline{X}) \rightarrow G$, welche die gewünschte Faktorisierung liefert

$$g = f \circ f_X.$$

□

Damit hat man Theorem 2.3.2 vollständig bewiesen. □

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Universalitätseigenschaft des assoziierten Fächers mSü sich nur auf strikte Abbildungen bezieht (siehe Theorem 2.4.9).

Beispiel 2.3.17. Man betrachtet die Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und den Topos

$$X = B(\Gamma)$$

in Beispiel A.0.11. Dann ist X ein log-geringter Topos, indem man den Ring $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}$ mit der trivialen Γ -Operation versieht und die assoziierte Log-Struktur bildet zu

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_X, \quad 1 \mapsto 0.$$

Der assoziierte Fächer ist dann $F(X) = \text{Spec}(\mathbb{N})$. Man betrachtet weiterhin $\text{Spec}(\mathbb{N}^2)$ mit der nichttrivialen Γ -Operation und den reduzierten Quotienten

$$G = [\text{Spec}(\mathbb{N}^2)/\Gamma]^{\text{red}}.$$

Dann existiert ein kanonischer Morphismus monoidaler Topoi

$$g : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow \text{Sh}(G),$$

wobei der Homomorphismus der Strukturgarben definiert ist durch

$$g^\sharp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad (m, n) \mapsto m + n.$$

Man sieht, dass g nicht über $F(X)$ faktorisiert. Dies ist kein Widerspruch zu der Universalitätsaussage in Theorem 2.3.2, denn g ist nicht strikt.

Zum Schluß des Abschnitts folgt ein instruktives Beispiel aus der algebraischen Geometrie. Für die entsprechende kombinatorische Betrachtung siehe Beispiel 1.4.16.

Beispiel 2.3.18. 1.) Man betrachtet zunächst das affine Schema X zu dem Ring

$$\mathbb{R}[x, y, \pi]/(x^2 + y^2 + \pi).$$

Es sei D der von π erzeugte Weildivisor in X . Man versieht X mit der Log-Struktur $\mathcal{M}(\log D)$ in Beispiel 2.1.3. Auf $X_{\mathbb{C}} = X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist die Log-Struktur assoziiert zu

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}, \quad (1, 0) \mapsto x + iy, \quad (0, 1) \mapsto x - iy.$$

Die Galoisgruppe von \mathbb{R} operiert nichttrivial auf den globalen Schnitten

$$\Gamma(X_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{M}}_{X_{\mathbb{C}}}) \simeq \mathbb{N}^2.$$

Der assoziierte Fächer mSü $F(\underline{X})$ ist der reduzierte Quotient in Beispiel 1.4.16.1

$$[\mathrm{Spec}(\mathbb{N}^2) / \mathrm{Gal}(\mathbb{R})]^{\mathrm{red}}.$$

2.) Weiterhin betrachtet man das affine Schema Y zu dem Ring

$$\mathbb{C}[x, y, \pi] / (y^2 + x^3 + x^2 + \pi).$$

Es sei E der von π erzeugte Weildivisor in X . Man versieht Y mit der Log-Struktur $\mathcal{M}(\log E)$. In einer étalen Umgebung des Ursprungs $x = 0, y = 0$ ist Y isomorph zu

$$U = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, \pi] / (xy + \pi)).$$

Hierüber ist die Log-Struktur assoziiert zu der Prälog-Struktur

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{O}_U, (1, 0) \mapsto x, (0, 1) \mapsto y.$$

Auf dem Komplement des Ursprungs ist die Log-Struktur assoziiert zu $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_X, 1 \mapsto \pi$. Der assoziierte Fächer mSü $F(\underline{Y})$ wurde in Beispiel 1.4.16.2 beschrieben. Er entsteht aus $\mathrm{Spec}(\mathbb{N}^2)$ durch Verklebung der beiden offenen Teile

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{N}^2 / \mathbb{N} \oplus 0), \mathrm{Spec}(\mathbb{N}^2 / 0 \oplus \mathbb{N}).$$

2.4 Selbstüberschneidung

In diesem Abschnitt wird der Begriff der *Selbstüberschneidung* aus der Theorie der toroidalen Einbettungen in [22] für kohärente Log-Schemata verallgemeinert. Log-Schemata ohne Selbstüberschneidung sind vor allem aus zwei Gründen wichtig:

1. Sie sind Zariski (siehe Korollar 2.4.8).
2. Sie besitzen gute kombinatorische Eigenschaften (siehe Theorem 2.4.9).

Später wird man weitere Gründe sehen, warum es wichtig ist Selbstüberschneidung auszuschließen, zum Beispiel in der *Star-Konstruktion* 3.2.3. Im nächsten Abschnitt wird ein wichtiges Resultat über die *Auflösung von Selbstüberschneidung* bewiesen.

Konvention. - *Es sei im Folgenden X ein lokal noethersches Schema.*

- *Eine Log-Struktur sei immer eine Log-Struktur auf $X_{\mathrm{ét}}$ (siehe Bemerkung 2.2.2).*
- *Für den assoziierten Fächer mSü schreibt man $F(\underline{X})$ (siehe Definition 2.3.4).*

Die folgende Definition von *Selbstüberschneidung* drängt sich auf.

Definition 2.4.1. *Ein kohärentes Log-Schema \underline{X} (bzw. die Log-Struktur \mathcal{M}_X) hat keine Selbstüberschneidung, wenn die folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

1. Der assoziierte Fächer $mSü F(\underline{X})$ hat keine Selbstüberschneidung.
2. Für jeden geometrischen Punkt \bar{x} von X hat jedes Bruchideal $I \subset \mathcal{M}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}}$ eine Ausdehnung zu einem kohärenten Bruchideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_X^{\text{gp}}$.
3. Für jeden geometrischen Punkt \bar{x} von X hat jedes Element in dem Halm $\overline{\mathcal{M}}_{X,\bar{x}}^{\text{gp}}$ eine Ausdehnung zu einem globalen Schnitt in $\Gamma(X, \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}})$.

Bemerkung 2.4.2. Dass die Aussagen äquivalent sind, folgt aus Theorem 2.3.2.

Definition 2.4.3. Für ein Log-Schema \underline{X} ohne Selbstüberschneidung definiert man gemäß 1.3.2 den assoziierten Polyederkegelkomplex

$$\text{Keg}(\underline{X}) := F(\underline{X})(\mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Bemerkung 2.4.4. Für eine Log-Struktur ohne Selbstüberschneidung kann man die Konstruktion des assoziierten Fächers $F(\underline{X})$ konkreter beschreiben:

Es sei hierfür (D_j) die kanonische Stratifizierung von X . Auf einem Stratum D_j ist die Charakteristik eine konstante Garbe M_j , denn die Log-Struktur hat keine Selbstüberschneidung. Der assoziierte Fächer $F(\underline{X})$ entsteht dann durch Verklebung

$$F(\underline{X}) = \bigcup_i \text{Spec}(M_j)$$

vermöge der Kospezialisierungen $\alpha_{ij}^\sharp : M_j \rightarrow M_i$ wie in Konstruktion 2.3.13.

Eine weitere wichtige Klasse von Log-Schemata ist wie folgt definiert:

Definition 2.4.5. Ein Log-Schema \underline{X} (bzw. eine Log-Struktur \mathcal{M}_X) heißt von Zariski-Typ oder einfach Zariski, wenn der kanonische Morphismus von Topoi

$$\varepsilon_X : X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{Zar}}$$

durch die Adjunktion von $\varepsilon_{X,*}$, ε_X^* einen Isomorphismus induziert

$$\eta : \varepsilon_X^* \varepsilon_{X,*} \mathcal{M}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X.$$

(Die Garbe $\varepsilon_{X,*}^{\log} \mathcal{M}_X$ stimmt mit dem direkten Bild $\varepsilon_{X,*} \mathcal{M}_X$ überein.)

Die nächste Proposition liefert ein Kriterium, wann eine Log-Struktur Zariski ist.

Proposition 2.4.6. Für ein ausgezeichnetes Log-Schema \underline{X} sind äquivalent:

1. Die Log-Struktur \mathcal{M}_X ist Zariski.
2. Die Log-Struktur \mathcal{M}_X besitzt Zariski lokal Karten.
3. Die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_X$ wird Zariski lokal von Schnitten erzeugt.

Beweis. Die Implikationen 1.) \Rightarrow 2.) \Rightarrow 3.) sind mehr oder weniger trivial.

Für die Implikation 3.) \Rightarrow 2.) betrachtet man die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_X^\times \rightarrow \mathcal{M}_X^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}} \rightarrow 1. \quad (2.4)$$

Für einen offenen Teil $U \subset X$ liefert die Auswertung mit $\Gamma(U, \cdot)$ die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U^\times) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}_U^{\text{gp}}) \rightarrow \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_U^{\text{gp}}) \xrightarrow{\delta} H_{\text{et}}^1(U, \mathcal{O}_U^\times).$$

Nach *Satz Hilbert' 90* stimmt $H_{\text{et}}^1(U, \mathcal{O}_U^\times)$ mit der Zariski Kohomologie $H^1(U, \mathcal{O}_U^\times)$ überein.

Für einen Punkt $x \in U$ wählt man Schnitte

$$s_1, \dots, s_n \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_X),$$

die den Halm $N = \overline{\mathcal{M}}_{X, \bar{x}}$ erzeugen. Hierbei ist \bar{x} ein geometrischer Punkt über x .

Die Obstruktion für eine Liftung von s_i nach $\Gamma(U, \mathcal{M}_X^{\text{gp}})$ liegt nach der obigen Sequenz in $H^1(U, \mathcal{O}_U^\times)$. Nach Verkleinerung von U kann man annehmen, dass die Obstruktionen $\delta(s_i)$ verschwinden. Dann kann man die s_i liften zu Schnitten

$$\tilde{s}_i \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^{\text{gp}}).$$

Es sei $\langle \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n \rangle$ die von den Schnitten erzeugte Untergruppe in $\Gamma(U, \mathcal{M}_X^{\text{gp}})$. Weiterhin sei M das Urbild von N unter der kanonischen Abbildung

$$\langle \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n \rangle \rightarrow N^{\text{gp}}.$$

Nach Konstruktion erhält man einen Homomorphismus $\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ und man sieht leicht, dass α in einer Zariski-Umgebung von x eine Karte von \mathcal{M}_X definiert.

Die Implikation 2.) \Rightarrow 1.) erhält man aus Proposition 2.2.5. \square

Bemerkung 2.4.7. Die Äquivalenz der Aussagen 1.) und 2.) gilt nach Proposition 2.2.5 ganz allgemein für eine quasikohärente Log-Struktur auf einem Topos.

Als triviale Konsequenz erhält man:

Korollar 2.4.8. *Ein ausgezeichnetes Log-Schema ohne Selbstüberschneidung ist Zariski.*

Theorem 2.3.2 hat nun die folgende Variante:

Theorem 2.4.9. *Es seien \underline{X} ein ausgezeichnetes Log-Schema ohne Selbstüberschneidung und $F(\underline{X})$ der assoziierte Fächer. Dann existiert ein Morphismus monoidaler Räume*

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow F(\underline{X}),$$

der eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaften:

1. *Es ist f_X ein strikter Morphismus monoidaler Räume.*

2. Der inverse Bildfunktor f_X^{-1} stellt eine eindeutige Korrespondenz her zwischen den (quasi)kohärenten (Bruch)Idealen von \mathcal{M}_X und $\mathcal{M}_{F(\underline{X})}$.

3. Für jeden Fächer G faktorisiert jeder Morphismus monoideal Räume

$$g : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow G$$

über einen eindeutigen Morphismus monoideal Räume

$$f : F(\underline{X}) \rightarrow G.$$

Bemerkung 2.4.10. Der entscheidende Unterschied liegt in der Universalität von

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow F(\underline{X}).$$

Während in Theorem 2.3.2 f_X lediglich universell für strikte Abbildungen ist, kann man in Theorem 2.4.9 auf diese Einschränkung verzichten.

Beweis. Dies beweist man wie Proposition 2.3.14. Lediglich den Beweis der Universalität muß man an der Stelle inspizieren, wo die Striktheit benötigt wurde:

Es stellte sich das Problem für die Einschränkung $g|_{D_j}$ eine Faktorisierung zu erhalten

$$g|_{D_j} : \mathcal{X}_{D_j} \rightarrow \text{Sh}(F_j) \rightarrow \text{Sh}(G).$$

Man wußte hierbei nur, dass die Abbildung $|g| : T \rightarrow |G|$ das Stratum $D_j \subset T$ auf einen Punkt abbildet. Falls G keine Selbstüberschneidung hat, kann man unabhängig von der Striktheit von g hieraus schließen, dass $g|_{D_j}$ die gewünschte Faktorisierung hat. \square

Beispiel 2.4.11. Die Umkehrung von Korollar 2.4.8 stimmt im Allgemeinen nicht:

1.) Es sei X ein Schema mit einem nichttrivialen Zariski $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Torsor \mathcal{P} . Man betrachtet den Monoid \mathbb{N}^2 mit nichttrivialer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Operation und bildet den Twist

$$\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{N}^2.$$

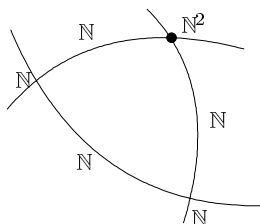
Dann ist die assoziierte Log-Struktur zu der Prälog-Struktur

$$\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{O}_Y, \quad \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{N}^+ \mapsto 0$$

Zariski, hat aber offensichtlich Selbstüberschneidung.

2.) Ein anderes Gegenbeispiel liefert eine singuläre Kurve X über einem Körper, deren irreduzible Komponenten glatt sind und die sich wie skizziert transversal schneiden.

Man kann X mit einer fs Log-Struktur versehen, so dass die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_X$ die in der Abbildung angegebenen Werte annimmt:



Das Log-Schema ist dann Zariski und verhält sich kombinatorisch wie eine Kurve mit nur einem Doppelpunkt. Insbesondere hat die Log-Struktur Selbstüberschneidung.

Bemerkung 2.4.12. Ein log-reguläres Log-Schema (Beispiel 2.3.7) ist genau dann von Zariski-Typ, wenn seine Log-Struktur keine Selbstüberschneidung hat.

Zum Schluß soll in diesem Abschnitt die Verträglichkeit der Bildung des assoziierten Fächers $F(\cdot)$ mit fs Faserprodukten untersucht werden. Dass diese im allgemeinen nicht kompatibel sind, zeigt das folgende einfache Beispiel.

Beispiel 2.4.13. Man betrachtet die folgenden fs Untermonoide von \mathbb{Z}^2 :

$$N = \mathbb{N}^2, \quad M_1 = \langle (1, 0), (-1, 1) \rangle, \quad M_2 = \langle (0, 1), (1, -1) \rangle$$

Man hat kanonische Abbildungen $N \rightarrow M_i$. Man versieht \mathbb{C} mit den fs Log-Strukturen

$$\mathbb{C}^\times \oplus N, \quad \mathbb{C}^\times \oplus M_i$$

in suggestiver Notation. Die entsprechenden Log-Körper seien $\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}_i$ für $i = 1, 2$. Dann ist das fs Koprodukt der kanonischen Homomorphismen $\underline{\mathbb{C}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}_i$ trivial

$$\underline{\mathbb{C}}_1 \otimes_{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{fs}} \underline{\mathbb{C}}_2 = 0.$$

Auf der anderen Seite ist das fs Faserprodukt der assoziierten Fächer $F(\underline{\mathbb{C}}_i)$ das Spektrum des Monoids $(M_1 \oplus_N M_2)^{\text{sat}}$ und insbesondere nichtleer.

Man betrachtet nun die folgende Situation. Es seien $\underline{X}_i \rightarrow \underline{S}$, $i = 1, 2$ Morphismen von fs Log-Schemata, deren Log-Strukturen keine Selbstüberschneidung haben. Man bildet

$$\underline{X}_3 = \underline{X}_1 \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{X}_2$$

und schreibt für die assoziierten Fächer

$$F = F(\underline{S}), \quad F_i = F(\underline{X}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Wegen der Funktorialität des assoziierten Fächers hat man eine kanonische Abbildung

$$F_3 \rightarrow F_1 \times_F^{\text{fs}} F_2.$$

Auch wenn diese Abbildung im Allgemeinen kein Isomorphismus ist, so gilt:

Proposition 2.4.14. 1. Die Abbildung $F_3 \rightarrow F_1 \times_F^{\text{fs}} F_2$ ist strikt.

2. Insbesondere hat die Log-Struktur \mathcal{M}_{X_3} keine Selbstüberschneidung.

Beweis. Die erste Aussage erhält man aus der Konstruktion von fs Faserprodukten in Bemerkung 2.2.4. Die zweite Aussage erhält man aus der ersten. \square

2.5 Log-Modifikationen

In diesem Abschnitt werden *Log-Modifikationen* und *Log-Aufblasungen* von *Log-Schemata* definiert. Der assoziierte Fächer besteht in diesem Abschnitt seinen ersten Test. *Denn er ist kompatibel mit eigentlichen Log-Modifikationen.* Hierdurch erhält man vielfältige Anwendungen in der logarithmischen Geometrie, wie zum Beispiel in Proposition 2.5.13 eine Aussage über die *Auflösung von Selbstüberschneidung durch Log-Aufblasungen*.

Proposition 2.5.1. *Es seien \underline{X} ein quasikohärentes Log-Schema und \mathcal{I} ein kohärentes (Bruch)Ideal von \mathcal{M}_X . Dann existieren ein quasikohärentes Log-Schema $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ und eine Abbildung $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\varphi_{\mathcal{I}}$ ist universell für Abbildungen, für die das Pullback $\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{I}$ invertierbar ist.
2. $X_{\mathcal{I}} \rightarrow X$ ist eine projektive Abbildung von Schemata.

Definition 2.5.2. *Es heißt $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$ die Log-Aufblasung von \underline{X} an \mathcal{I} .*

Beweis. Man betrachtet die Potenzen \mathcal{I}^n , $n \geq 0$. Diese sind ebenfalls kohärent und induzieren nach Proposition 2.2.3 kohärente \mathcal{O}_X -Moduln

$$\mathcal{I}^n \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{O}_X.$$

Man definiert die Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ durch

$$\underline{X}_{\mathcal{I}} := \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{O}_X\right).$$

Die Log-Struktur ist induziert durch den Homomorphismus graduerter Monoide

$$\coprod_{n \geq 0} \mathcal{I}^n \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{O}_X.$$

Es existiert eine kanonische projektive Abbildung von Log-Schemata

$$\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \underline{X}.$$

Die Universalität von $\varphi_{\mathcal{I}}$ ist in (Proposition 3.3.8 in [39]) bewiesen. □

Bemerkung 2.5.3. Es sei $M \rightarrow \mathcal{M}_X$ eine Karte und $I \subset M$ ein Ideal. Dann kann man die Log-Aufblasung \underline{X}_I bilden. Deren unterliegendes Schema ist das klassische Pullback der Aufblasung von $\text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$ an dem Ideal $\mathbb{Z}[M] \cdot I$.

Konvention. *Im Folgenden sei \underline{X} ein lokal noethersches, ausgezeichnetes Log-Schema. Für den assoziierten Fächer mit Selbstüberschneidung (Definition 2.3.4) schreibt man*

$$F := F(\underline{X}).$$

Das wesentliche Ziel in diesem Abschnitt ist die Konstruktion eines Funktors

$$(G \rightarrow F) \longmapsto (\underline{X} \times_F G \rightarrow \underline{X})$$

von den Fan-Modifikationen $G \rightarrow F$ in die ausgezeichneten Log-Schemata über \underline{X} (siehe 1.4.11, 1.4.10). Ein Problem ist hierbei, dass $\underline{X} \times_F G$ nicht für alle Fan-Modifikationen als Log-Schema definiert ist (siehe Bemerkung 2.5.6).

Eine wichtige Eigenschaft dieses Funktors ist die Existenz einer kanonischen Abbildung

$$F(\underline{X} \times_F G) \longrightarrow G^{\text{red}},$$

die surjektiv und strikt ist. Siehe Proposition 1.4.13 für die Definition von G^{red} .

Das folgende Theorem faßt die wichtigsten Eigenschaften zusammen:

Theorem 2.5.4. *Es sei \underline{X} ein ausgezeichnetes Log-Schema.*

1. *Ist die Log-Struktur \mathcal{M}_X Zariski, so gilt:*

- (a) *Das Log-Schema $\underline{X} \times_F G$ ist für jede Fan-Modifikation $G \rightarrow F$ definiert.*
- (b) *Es existiert eine kanonische surjektive, strikte Abbildung von Fächern*

$$F(\underline{X} \times_F G) \longrightarrow G.$$

- (c) *Ist $G \rightarrow F$ eine eigentliche Fan-Modifikation und ist \underline{X} ein fs Log-Schema, so ist die Abbildung in b) ein Isomorphismus*

$$F(\underline{X} \times_F G) \xrightarrow{\sim} G.$$

- (d) *$\underline{X} \times_F *$ ist ein Funktor von der Kategorie der Fan-Modifikationen $G \rightarrow F$ in die ausgezeichneten Log-Schemata von endlichem Typ über \underline{X} .*

2. *Ist die Log-Struktur \mathcal{M}_X nicht notwendig Zariski, so gilt:*

- (a) *Das Log-Schema $\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}$ ist für Fan-Aufblasungen $F_{\mathcal{I}} \rightarrow F$ definiert.*
- (b) *Ist \underline{X} ein fs Log-Schema, so hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$F(\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}) \xrightarrow{\sim} (F_{\mathcal{I}})^{\text{red}}.$$

- (c) *Die Konstruktion von $\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}$ ist kompatibel mit den bisherigen Definitionen: Bezeichnet man das induzierte kohärente (Bruch)Ideal von \mathcal{M}_X ebenfalls mit \mathcal{I} (siehe Theorem 2.3.2), so hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \underline{X}_{\mathcal{I}},$$

wobei $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ die induzierte Log-Ausblausung ist (siehe Definition 2.5.2).

Die folgende Definition erweist sich als sinnvoll:

Definition 2.5.5. Eine Log-Modifikation $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$ entsteht durch Komposition einer strikten offenen Immersion $\underline{U} \hookrightarrow \underline{X} \times_F G$ mit dem kanonischen Morphismus,

$$\underline{X} \times_F G \rightarrow \underline{X}.$$

der via Theorem 2.5.4 induziert ist durch eine Fan-Modifikation $G \rightarrow F$.

Bemerkung 2.5.6. In der Kategorie der log-algebraischen Räume kann man die assoziierte Log-Modifikation $\underline{X} \times_F G$ für alle Fan-Modifikationen $G \rightarrow F$ definieren.

Bemerkung 2.5.7. Die bisherigen Definitionen von Log-Modifikationen in [22], [18], [17] sind unterschiedlich. Die Definition in dieser Arbeit verallgemeinert diese.

Beweis des ersten Teils von Theorem 2.5.4.

Es gilt zunächst die Log-Modifikation $\underline{X} \times_F G$ zu konstruieren.

Konstruktion 2.5.8. Man kann a priori annehmen, dass die Log-Struktur \mathcal{M}_X eine Karte und damit keine Selbstüberschneidung hat. Denn \mathcal{M}_X ist Zariski.

Es bezeichne $\psi : G \rightarrow F$ die gegebene Fan-Modifikation.

Man kann annehmen, dass die Urbilder affiner offener Teile von F unter ψ ebenfalls affin sind. In dieser Situation nennt man $\underline{X} \times_F G \rightarrow \underline{X}$ eine affine Log-Modifikation. Eine allgemeine Log-Modifikation erhält man durch Verklebung affiner Log-Modifikationen.

In dieser Situation sind das Urbild von $\psi_* \mathcal{M}_G$ unter dem Homomorphismus

$$\mathcal{M}_F^{\text{gp}} \rightarrow \psi_* \mathcal{M}_G^{\text{gp}}$$

ein quasikohärenter \mathcal{M}_F -Untermonoid $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_F^{\text{gp}}$ und G das relative Spektrum $\text{Spec}(\mathcal{N})$. Nach Theorem 2.3.2 induziert der Monoid \mathcal{N} einen quasikohärenten \mathcal{M}_X -Untermonoid von $\mathcal{M}_X^{\text{gp}}$, der ebenfalls mit \mathcal{N} bezeichnet wird ohne den Leser zu verwirren.

Man erhält schließlich nach Proposition 2.2.3 die quasikohärente \mathcal{O}_X -Algebra

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N}.$$

Man definiert nun die durch $G \rightarrow F$ induzierte Log-Modifikation durch

$$\underline{X} \times_F G := \text{Spec}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N}).$$

Die Log-Struktur ist assoziiert zu der kanonischen Prälog-Struktur

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N}.$$

Wegen der Kohärenz von \mathcal{N} ist die Log-Struktur ausgezeichnet.

Nach Konstruktion existiert eine kanonische Abbildung von Log-Schemata

$$\underline{X} \times_F G \longrightarrow \underline{X}.$$

Bemerkung 2.5.9. Um die Konstruktion noch expliziter zu machen, betrachtet man Karten $M \rightarrow \mathcal{M}_X$, $N \rightarrow \mathcal{N}$ mit N einem M -Untermonoid von M^{gp} . Dann ist

$$\underline{X} \times_F G = \text{Spec}(\mathcal{O}_X \otimes_M N).$$

Proposition 2.5.10. 1. *Es existiert eine kanonische strikte Abbildung*

$$F(\underline{X} \times_F G) \rightarrow G.$$

2. *Ist $G \rightarrow F$ eine eigentliche Fan-Modifikation und ist die Log-Struktur \mathcal{M}_X fs, so ist die Abbildung in 1.) ein Isomorphismus*

$$F(\underline{X} \times_F G) \xrightarrow{\sim} G.$$

Beweis. Man beweist lediglich die zweite Aussage. Die erste zeigt man ganz analog. Ferner nimmt man der Einfachheit halber an, dass die Log-Struktur \mathcal{M}_X keine Selbstüberschneidung hat. Der allgemeine Fall spielt im weiteren Verlauf nur eine untergeordnete Rolle. Man benötigt für den Beweis die Konstruktion des assoziierten Fächers (Bemerkung 2.4.4).

Man schreibt im Folgenden $\underline{Y} = \underline{X} \times_F G$ für die induzierte Log-Modifikation. Lokal auf X existiert eine Karte $M \rightarrow \mathcal{M}_X$ mit M einem scharfen fs Monoid, so dass \underline{Y} isomorph ist zu dem Pullback einer eigentlichen equivarianten Modifikation des torischen Schemas $\text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$ (siehe 5.2.2). Insbesondere ist die Abbildung $Y \rightarrow X$ eigentlich.

Man betrachtet die kanonische Stratifizierung (E_k) von Y . Man schreibt N_k für die Monoide $\overline{\mathcal{M}}_{E_k}$. Die Strata E_k , die auf ein festes D_j abgebildet werden, entsprechen eindeutig den Punkten in dem Urbild von M_j^+ unter der kanonischen Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow F \supset \text{Spec}(M_j).$$

Nach Umsortierung schreibt man E_{jk} für die Strata mit $E_{jk} \mapsto D_j$.

Der entscheidende Punkt ist das Studium der Spezialisierungen $E_{ik} \rightsquigarrow E_{jl}$:

Man betrachtet eine Spezialisierung $D_i \rightsquigarrow D_j$ und ein E_{ik} über D_i . Zu Erinnerung:

$$D_i \rightsquigarrow D_j \iff D_i^{\text{cls}} \cap D_j \neq \emptyset.$$

Mit dem *Bewertungskriterium für Eigentlichkeit* sieht man, dass ein eindeutiges E_{jl} über D_j liegt und das eine Spezialisierung von E_{ik} ist

$$E_{ik} \rightsquigarrow E_{jl}.$$

Dies ist die einzige Stelle, wo die Eigentlichkeit von $G \rightarrow F$ benutzt wird!

Andersherum induziert jede Spezialisierung der E_{jk} eine Spezialisierung der D_j .

Über jedem E_{jl} ist die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_{E_{jl}}$ eine konstante Garbe N_{jl} . Nach Konstruktion induziert die Abbildung $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ Homomorphismen $M_j \rightarrow N_{jl}$. Weiterhin induziert eine Spezialisierung $E_{ik} \rightsquigarrow E_{jl}$ wie in Konstruktion 2.3.13 eine Kospezialisierung

$$\alpha : N_{jl} \rightarrow N_{ik},$$

die einen Isomorphismus herstellt $N_{jl}/\text{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\sim} N_{ik}$. Zusammen mit der durch $D_i \rightsquigarrow D_j$ induzierten Kospezialisierung $M_j \rightarrow M_i$ und mit den Abbildungen $M_j \rightarrow N_{jl}$, $M_i \rightarrow N_{ik}$ erhält man nach Übergang zu den Spektren ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(N_{ik}) & \longrightarrow & \text{Spec}(N_{jl}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(M_i) & \longrightarrow & \text{Spec}(M_j) \end{array}$$

Der Rest des Beweises der Proposition ist einfach. Auf der einen Seite ergibt die Verklebung der affinen Fächer $\text{Spec}(N_{ik})$ vermöge der offenen Immersionen

$$\text{Spec}(N_{ik}) \hookrightarrow \text{Spec}(N_{jl})$$

den Fächer G . Auf der anderen Seite erhält man durch Verklebung der $\text{Spec}(N_{jl})$ den assoziierten Fächer $F(\underline{X} \times_F G)$ und die Behauptung folgt. \square

Die Funktorialität von $\underline{X} \times_F *$ erhält man aus der nächsten Proposition:

Proposition 2.5.11. *Die kanonische Abbildung von Log-Schemata*

$$\underline{X} \times_F G \rightarrow \underline{X}$$

ist universell für Abbildungen $\psi : \underline{Z} \rightarrow \underline{X}$, so dass die induzierte Abbildung

$$F(\psi) : F(\underline{Z}) \rightarrow F$$

eine Faktorisierung über die Fan-Modifikation $G \rightarrow F$ besitzt.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\underline{X} \times_F G$ eine affine Log-Modifikation

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N}),$$

wobei \mathcal{N} ein quasikohärenter \mathcal{M}_X -Untermonoid von $\mathcal{M}_X^{\text{gp}}$ ist. Aus den Voraussetzungen folgt, dass der induzierte Homomorphismus $\psi^{-1}\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}_Z^{\text{gp}}$ über die Strukturgarbe \mathcal{M}_Z faktorisiert. Man erhält somit einen kanonischen Homomorphismus

$$\psi^{-1}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{O}_Z.$$

Dieser Homomorphismus induziert eine Abbildung von Log-Schemata

$$\underline{Z} \rightarrow \underline{X} \times_F G.$$

Dass die Abbildung die gewünschten Eigenschaften hat, ist evident. \square

Beweis des zweiten Teils von Theorem 2.5.4.

Wie nicht anders zu erwarten war, definiert man $\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}$ als die Log-Aufblasung:

$$\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}} := \underline{X}_{\mathcal{I}}.$$

Es bleibt dann noch zu zeigen:

Proposition 2.5.12. *Es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$F(\underline{X}_{\mathcal{I}}) \xrightarrow{\sim} F_{\mathcal{I}}.$$

Beweis. Zunächst betrachtet man den Fall, dass die Log-Struktur \mathcal{M}_X Zariski ist. Dann sieht man, dass die Log-Modifikation $\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}$ mit der Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ übereinstimmt. Insbesondere hat man kanonische Isomorphismen

$$F(\underline{X}_{\mathcal{I}}) \xrightarrow{\sim} F(\underline{X} \times_F F_{\mathcal{I}}) \xrightarrow{\sim} F_{\mathcal{I}}.$$

Im allgemeinen Fall geht man ganz ähnlich vor wie in Konstruktion 2.3.15:

Man wählt eine étale Überdeckung $p : X' \rightarrow X$, so dass die Pullback Log-Struktur $\mathcal{M}_{X'}$ eine Karte besitzt. Dann hat $\mathcal{M}_{X'}$ insbesondere keine Selbstüberschneidung. Als algebraischer Raum bzw. étale Äquivalenzrelation hat X eine Darstellung

$$X = [p_i : X'' \rightrightarrows X'],$$

wobei X'' das Faserprodukt $X' \times_X X'$ ist und p_i die Projektionen sind. Das Faserprodukt $\underline{X}'_{\mathcal{I}} = \underline{X}_{\mathcal{I}} \times_X X'$ ist die Log-Aufblasung von \underline{X}' an dem Pullback von \mathcal{I} . Ferner hat $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ eine Darstellung als strikte étale Äquivalenzrelation von Log-Schemata

$$\underline{X}_{\mathcal{I}} = [q_i : \underline{X}''_{\mathcal{I}} \rightrightarrows \underline{X}'_{\mathcal{I}}].$$

Wendet man nun den Funktor des assoziierten Fächers $F(\cdot)$ auf die obige Darstellung an, so erhält man ein striktes Diagramm von Fächern

$$F(q_i) : F(\underline{X}''_{\mathcal{I}}) \rightrightarrows F(\underline{X}'_{\mathcal{I}}).$$

Wie in dem Beweis von Proposition 2.3.16 zeigt man dann, dass dieses Diagramm den assoziierten Fächer $\text{mSü } F(\underline{X}_{\mathcal{I}})$ erzeugt und die Behauptung folgt. \square

Damit hat man das Theorem 2.5.4 vollständig bewiesen. \square

Mit Hilfe von Theorem 2.5.4 kann man die gesamte Theorie von Mumford in [22] auf kombinatorische Probleme von fs Log-Schemata anwenden. So erhält man zum Beispiel das folgende Resultat über die *Auflösung von Selbstüberschneidung*:

Proposition 2.5.13. *Für ein quasikompaktes fs Log-Schema \underline{X} kann man eine Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ konstruieren, die folgende Eigenschaften hat:*

1. *Die Log-Struktur $\mathcal{M}_{X_{\mathcal{I}}}$ hat keine Selbstüberschneidung.*
2. *\underline{X} ist kombinatorisch regulär, d.h. die Halme $\overline{\mathcal{M}}_{X_{\mathcal{I}},x}$ sind freie Monoide.*

Beweis. Zuerst konstruiert man mit Proposition 1.4.14 eine fs Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{J}}$, die keine Selbstüberschneidung hat. Mit der kombinatorischen Konstruktion zu (Theorem 11 in [22], §2, Kapitel I) findet man dann eine kombinatorisch reguläre Log-Aufblasung von $\underline{X}_{\mathcal{J}}$. Dass die Komposition von Log-Aufblasungen quasikompakter Log-Schemata ebenfalls eine Log-Aufblasung ist, folgt aus (Korollar 1.12 in [22], Kapitel III, §1). \square

Es folgen mehrere Fakten über log-reguläre Log-Schemata (siehe Beispiel 2.3.7).

Für ein log-reguläres \underline{X} stimmt das unterliegende Schema einer Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ mit der klassischen Aufblasung an dem erzeugten kohärenten \mathcal{O}_X -Ideal überein. Denn nach (Theorem 6.2 in [18]) hat man lokal eine Karte $M \rightarrow \mathcal{M}_X$, so dass die Abbildung

$$X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$$

flach ist. Weiterhin ist das unterliegende Schema eines log-regulären Log-Schemas genau dann im klassischen Sinne regulär, wenn die Log-Struktur kombinatorisch regulär ist. Als Konsequenz aus Proposition 2.5.13 erhält man nun das folgende Resultat über die *Auflösung torischer Singularitäten und Selbstüberschneidung*.

Korollar 2.5.14. *Für ein quasikompaktes log-reguläres Log-Schema kann man eine Log-Aufblasung konstruieren, die folgende Eigenschaften hat:*

1. *Die Log-Struktur hat keine Selbstüberschneidung.*
2. *Das unterliegende Schema ist im klassischen Sinne regulär.*

Beispiel 2.5.15. Für die Log-Schemata in Beispiel 2.3.18 kann man Log-Aufblasungen angeben, die Korollar 2.5.13 genügen. Die Notation sei hierbei wie in Beispiel 2.3.18.

1.) Man betrachtet das Log-Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_X$, das auf $X_{\mathbb{C}}$ erzeugt wird von

$$x + iy, x - iy \in \Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{M}_{X_{\mathbb{C}}}).$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass \mathcal{I} von $X_{\mathbb{C}}$ nach X absteigt.

Es sei nun $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$ die Log-Aufblasung. Dann ist der Ausnahme-Divisor $D(\mathcal{I}) \subset X_{\mathcal{I}}$ (siehe Definition 4.3.4) eine nichttriviale \mathbb{R} -Form von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

2.) Man betrachtet das Log-Ideal \mathcal{J} , das auf U erzeugt wird von

$$x, y \in \Gamma(U, \mathcal{M}_U).$$

Es sei $\varphi_{\mathcal{J}} : \underline{Y}_{\mathcal{J}} \rightarrow \underline{Y}$ die Log-Aufblasung. Der Ausnahme-Divisor $D(\mathcal{J})$ ist eine projektive Gerade. Die spezielle Faser von Y ist eine rationale Kurve mit einem Doppelpunkt. Die spezielle Faser der Log-Aufblasung $Y_{\mathcal{J}}$ hat jedoch als irreduziblen Komponenten zwei projektiven Geraden, die sich transversal in einem Punkt schneiden.

Kapitel 3

Log-Glattheit

3.1 Allgemeine Fakten

Wie in der klassischen algebraischen Geometrie kann man auch für Abbildungen von Log-Schemata die Eigenschaft der *Log-Glattheit* einführen. Neben vielen anderen Fakten ist in diesem Abschnitt vor allem *Katos Kriterium für Log-Glattheit* zu beachten.

Konvention. *Alle Log-Schemata seien im Folgenden lokal noethersch und fs.*

Ganz analog wie in der klassischen algebraischen Geometrie definiert man:

Definition 3.1.1. *Es sei $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ein Morphismus von fs Log-Schemata.*

1. *Das Log-Schema \underline{X} heißt log-glatt (bzw. log-étale) über \underline{S} , wenn X lokal von endlichem Typ über S ist und für jedes kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \underline{Y}' & \longrightarrow & \underline{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Y} & \longrightarrow & \underline{S} \end{array}$$

mit $\underline{Y}' \rightarrow \underline{Y}$ einer strikten, nilpotenten, abgeschlossenen Immersion ein (eindeutiger) Morphismus $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ existiert, der das Diagramm kommutativ ergänzt.

2. *Eine Log-Derivation von \underline{X} über \underline{S} mit Werten in einem \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} besteht aus einer Derivation $D : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ und einer Abbildung $D \log : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{F}$ mit*

(a) $D \log(ab) = D \log(a) + D \log(b),$

(b) $D(\alpha_X(a)) = \alpha_X(a)D \log(a),$

(c) $D \log(n) = 0$

für Schnitte a, b von \mathcal{M}_X und n von \mathcal{M}_S .

3. *Die Garbe der Log-Differentiale von \underline{X} über \underline{S} ist der \mathcal{O}_X -Modul*

$$\Omega_{\underline{X}/\underline{S}} := [\Omega_{X/S} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_X^{\text{gp}})]/\mathcal{K},$$

wobei $\Omega_{X/Y}$ die klassischen Kählerdifferentialiale sind und \mathcal{K} der \mathcal{O}_X -Untermodule ist, der erzeugt wird von allen Schnitten der Form

$$(d(\alpha_X(a)), 0) - (0, \alpha_X(a) \otimes a), (0, 1 \otimes n).$$

Die Beweise für die folgenden Aussagen findet man in (§2, [19]).

Proposition 3.1.2. 1. *Log-Glattheit, Log-Étalität sind stabil unter fs Basiswechseln.*

2. *Der Funktor $\text{Der}_{\underline{S}}(\underline{X}, \cdot)$, der einem \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} die Log-Derivationen mit Werten in \mathcal{F} zuordnet, wird dargestellt durch $\Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ mit den Abbildungen*

$$\begin{aligned} d : \mathcal{O}_X &\rightarrow \Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{\underline{X}/\underline{S}} \\ d \log : \mathcal{M}_X &\rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_X^{\text{gp}} \rightarrow \Omega_{\underline{X}/\underline{S}}. \end{aligned}$$

3. *$\Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ ist ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Für einen log-glatten (bzw. log-étalen) Morphismus $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ist $\Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ lokal frei (bzw. trivial).*

4. *Es seien $\underline{X} \xrightarrow{f} \underline{Y} \xrightarrow{g} \underline{S}$ Morphismen von fs Log-Schemata. Dann existiert eine kanonische kurze exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln:*

$$f^* \Omega_{\underline{Y}/\underline{S}} \rightarrow \Omega_{\underline{X}/\underline{S}} \rightarrow \Omega_{\underline{X}/\underline{S}} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

5. *Ist die Abbildung f in 4.) log-glatt, so ist $f^* \Omega_{\underline{Y}/\underline{S}} \hookrightarrow \Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ injektiv.*

6. *Ist die Verkettung $g \circ f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ in 4.) log-glatt, so ist die exakte Sequenz (3.1) genau dann exakt und lokal spaltbar, wenn $\underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ log-glatt ist.*

Beispiel 3.1.3. Es seien S ein Schema und M ein fs Monoid, so dass die Kardinalität der Torsion von M^{gp} invertierbar in \mathcal{O}_S ist. Dann ist

$$\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$$

mit der kanonischen Log-Struktur log-glatt über S . Weiterhin ist $\Omega_{\underline{X}/S}$ isomorph zu

$$M^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X.$$

Ferner ist $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[M]) \rightarrow S$ genau dann klassisch glatt, wenn $\overline{M} \simeq \mathbb{N}^r$ frei ist.

Sehr wichtig und praktisch ist das *Kriterium für Log-Glattheit von Kato*. Beweise für dieses wichtige Theorem findet man in [19] und (Theorem 4.1 in [16]).

Theorem 3.1.4. *Eine Abbildung von fs Log-Schemata $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ist genau dann log-étale (bzw. log-glatt), wenn die Abbildung f étale lokal bzgl. X und S im klassischen Sinne eine Karte besitzt (im Sinne von Definition 2.2.1)*

$$\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_X, \beta : N \rightarrow \mathcal{O}_S, \varphi : N \hookrightarrow M,$$

so dass der induzierte Homomorphismus $\varphi^{\text{gp}} : N^{\text{gp}} \hookrightarrow M^{\text{gp}}$ injektiv ist, die Kardinalität (der Torsion) von $M^{\text{gp}}/N^{\text{gp}}$ in \mathcal{O}_S invertierbar ist und die induzierte Abbildung

$$g : X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_N M)$$

im klassischen Sinne étale ist.

Das nächste Lemma ist eine Verfeinerung von Katos Kriterium:

Lemma 3.1.5. *Es sei $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ log-glatt und $\bar{x}, \bar{s} = f(\bar{x})$ geometrische Punkte von X bzw. S . Dann existiert auf étalen Umgebungen von \bar{x}, \bar{s} eine Karte wie Theorem 3.1.4,*

$$\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_X, \beta : N \rightarrow \mathcal{O}_S, \varphi : N \hookrightarrow M,$$

so dass zusätzlich $\overline{M} = \overline{\mathcal{M}}_{X, \bar{x}}$ und $N = \overline{\mathcal{M}}_{S, \bar{s}}$ gilt (letzte Gleichung nicht mod N^\times !!). Weiterhin kann man verlangen, dass $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$ torsionsfrei ist.

Beweis. Man wählt zunächst eine beliebige Karte α, β, φ wie Katos Kriterium und die Aufgabe ist nun, die Karte so zu modifizieren, dass die Zusatzbedingungen erfüllt sind.

Man reduziert zunächst ohne Schwierigkeiten auf den Fall

$$\overline{M} = \overline{\mathcal{M}}_{X, \bar{x}}, \overline{N} = \overline{\mathcal{M}}_{X, \bar{x}}.$$

Man zeigt, dass die Kardinalität der Torsion M^\times/N^\times invertierbar in \mathcal{O}_S ist. Es sei hierfür m ein Element in M^\times mit $m^i \in N^\times$, $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist nach Voraussetzung $m^j \in N^{\text{gp}}$ für eine Zahl $j \in \mathbb{Z}$, die invertierbar in \mathcal{O}_S ist. Somit ist $(m^j)^i \in N^\times$ und wegen der Saturiertheit von N erhält man wie gewünscht $m^j \in N^\times$.

Man sieht, dass die Ausgangskarte ersetzt werden kann durch eine Karte, für die der Quotient M^\times/N^\times frei abelsch ist. Hierfür benutzt man, dass die Kardinalität der Torsion von M^\times/N^\times in \mathcal{O}_S invertierbar ist. Via geeigneter Spaltungen gilt

$$M \simeq \overline{M} \oplus (M^\times/N^\times) \oplus N^\times.$$

Dann gilt bzgl. der obigen Darstellung $\varphi(n) = (0, 0, n)$ für alle $n \in N^\times$. Man sieht, dass eine Spaltung $s : \overline{N} \rightarrow N$ existiert, für welche die Komposition

$$\varphi \circ s : \overline{N} \rightarrow M$$

über $\overline{M} \oplus (M^\times/N^\times)$ faktorisiert. Nun gilt via der Spaltung s kanonisch

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_N M) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_{\overline{N}} [\overline{M} \oplus (M^\times/N^\times)]).$$

Somit erfüllt die induzierte Karte die ersten beiden Bedingungen:

$$\alpha \circ s, \beta|_{\overline{M} \oplus (M^\times/N^\times)}, \varphi \circ s$$

Dass man die Torsion von M^{gp} eliminieren kann, sieht man analog. □

Mit Katos Kriterium erhält man Beispiele für log-glatte Abbildungen:

Beispiel 3.1.6. *Log-Modifikationen sind log-étale Abbildungen.*

Beispiel 3.1.7. Log-glatten Log-Schemata \underline{X} über einem Körper k , der versehen ist mit der trivialen Log-Struktur, entsprechen eindeutig toroidalen Einbettungen $U \hookrightarrow X$ über k (Definition 1 in [22], Kapitel II, §1). Die Log-Struktur ist hierbei $\mathcal{M}(\log(X - U))$.

Beispiel 3.1.8. Es seien (R, π) ein diskreter Bewertungsring und $U \hookrightarrow X$ eine toroidale Einbettung über R (§3 in [22], Kapitel IV). Dann ist $\mathcal{M}(\log(X - U))$ eine fs Log-Struktur und hiermit ist \underline{X} log-glatt über \underline{R} mit der Standard Log-Struktur. *Anders als in dem obigen Beispiel 3.1.8 ist die Korrespondenz ist aber nicht vollständig:* Zum Beispiel ist eine zahm verzweigte endliche Erweiterung diskreter Bewertungsringe log-étale.

Bemerkung 3.1.9. *Man kann in Lemma 3.1.5 im Allgemeinen nicht verlangen, dass die Karte auch $M \simeq \overline{\mathcal{M}}_{X,\bar{x}}$ erfüllt. Man betrachte zum Beispiel das Log-Schema*

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[[\pi]][x, y]/(x \cdot y - \pi))$$

über dem diskreten Bewertungsring $\mathbb{F}_2[[\pi]]$ jeweils mit den kanonischen Log-Strukturen. Es sei \underline{X} die Log-Aufblasung an dem von x, y erzeugten Ideal. Dann ist \underline{X} über $\mathbb{F}_2[[\pi]]$ log-glatt. Für Punkte x in dem Ausnahme-Divisor der Log-Aufblasung gilt

$$\overline{\mathcal{M}}_{X,x}^{\mathrm{gp}}/\pi^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.2 Log-Glattheit und toroidale Einbettungen

Mit Katos Kriterium kann man log-glatte Abbildungen sehr gut lokal verstehen. Für das Studium der *log-abelschen Varietäten* benötigt man jedoch ein globales Verständnis. *In diesem Abschnitt werden log-glatte Abbildungen als stratifizierter Raum global durch klassische toroidale Einbettungen beschrieben.*

Konvention. *In diesem Abschnitt seien alle Log-Schemata lokal noethersch und fs.*

Definition 3.2.1. *Eine log-glatte Abbildung $\underline{X} \rightarrow S$ heißt toroidal, wenn S mit der trivialen Log-Struktur versehen ist.*

Warnung. *Man beachte, dass in dem Fall $S = \mathrm{Spec}(R)$ mit (R, π) einem diskreten Bewertungsring die Bezeichnung von der in [22] abweicht. In loc. cit. ist*

toroidal := log-glatt über (R, π) mit der Standard Log-Struktur.

Bemerkung 3.2.2. Für einen toroidalen Morphismus $f : \underline{X} \rightarrow S$ ist die offene Menge

$$U = \{x \in X ; \overline{\mathcal{M}}_{X,x} = 1\}$$

nichtleer und die Einschränkung $f|_U$ ist klassisch glatt über S . Weiterhin bilden die Fasern $U_s \hookrightarrow X_s$, $s \in S$ eine flache Familie toroidaler Einbettungen.

Bemerkung 3.2.3. In dem weiteren Verlauf spielt die folgende Variante der bekannten *Star-Konstruktion* in der Theorie der Polyederkegelkomplexe [22] eine große Rolle:

- Sind F ein Fächer und $d \in F$ ein Punkt, so ist der topologische Abschluß

$$\mathrm{Star}_F(d) := \{d\}^{\mathrm{cls}}$$

auf kanonische Weise ein Fächer. Die Strukturgarbe auf $\mathrm{Star}_F(d)$ erhält man wie folgt:

Bezeichnet $i : \mathrm{Star}_F(d) \hookrightarrow F$ die Inklusion, so ist die Strukturgarbe die Untergarbe von $i^{-1}\mathcal{M}_F$ aller Schnitte, die in d trivial (= invertierbar) sind.

Es ist $\mathrm{Star}_F(d)$ tatsächlich ein Fächer: Denn ist $F = \mathrm{Spec}(M)$ affin, so entspricht der Punkt d einem Primideal $\mathfrak{p} \subset M$ und man erhält

$$\mathrm{Star}_F(d) = \mathrm{Spec}(M - \mathfrak{p}).$$

- Die Primideale \mathfrak{p} verkleben zu einem kohärenten Ideal \mathcal{P}_d , so dass gilt

$$i^{-1}\mathcal{M}_F = \mathcal{M}_{\text{Star}_F(d)} \amalg i^*\mathcal{P}_d.$$

- In der Konstruktion des Fächers $\text{Star}_F(d)$ benutzt man wesentlich die Voraussetzung, dass der Fächer F keine Selbstüberschneidung hat.

- $(F, d) \mapsto \text{Star}_F(d)$ ist ein Funktor auf der Kategorie der punktierten Fächer.

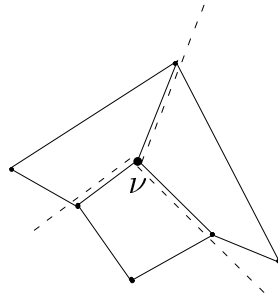
- Ist für $(G, e) \rightarrow (F, d)$ die unterliegende Abbildung $G \rightarrow F$ eine Fan-Modifikation (bzw. Fan-Aufblasung), so trifft dies auch zu auf die induzierte Abbildung

$$\text{Star}_G(e) \rightarrow \text{Star}_F(d).$$

- Den Zusammenhang mit der Definition in [22] erhält man wie folgt:

Ist δ die Zelle in dem Polyederkegelkomplex der $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -wertigen Punkte $F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ zu dem Punkt d , so besteht der $\text{Star}_F(d)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ aus allen Zellen mit Seite δ .

Unten ist in dem Fall $\dim(\delta) = 1$ ein transversaler Schnitt durch δ skizziert. Hierbei spannen die gestrichelten Geraden die Zellen von $\text{Star}_F(d)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ auf.



3.2.4. Man betrachtet für die nächste Proposition die folgende Situation:

- Es sei $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ eine log-glatte Abbildung.

- Es sei (D_j) die kanonische Stratifizierung von X (Definition 2.3.10). Man wählt ein Stratum $D = D_j$ und es sei $Z = \{D\}^{\text{cls}}$ der topologische Abschluß in X .

Zusätzlich macht man die beiden folgenden Voraussetzungen:

- Die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_S = N$ sei konstant. Dann erzeugt das kohärente Ideal

$$\mathcal{M}_S^+ = \pi^{-1}(N^+),$$

mit $\pi : \mathcal{M}_S \rightarrow N$ der kanonischen Projektion, ein lokal nilpotentes Ideal in \mathcal{O}_S . Weiterhin ist der assoziierte Fächer $F(\underline{S})$ die disjunkte Vereinigung von Kopien von $\text{Spec}(N)$.

- Die Log-Struktur \mathcal{M}_X habe keine Selbstüberschneidung (siehe Definition 2.4.1).

Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt nun:

Proposition 3.2.5. *Versieht man Z, S mit den reduzierten Unterschemastrukturen, so trägt Z eine kanonische Log-Struktur, mit der $\underline{Z} \rightarrow S$ toroidal ist.*

Beweis. Man benötigt die logarithmische Variante der Star-Konstruktion in 3.2.3:

Konstruktion 3.2.6. Das Stratum D wird unter $X \rightarrow F(\underline{X})$ auf einen Punkt d abgebildet. Die Schnitte von $\mathcal{M}_{F(\underline{X})}$, die nicht in d invertierbar sind, bilden ein kohärentes Ideal (siehe 3.2.3). Dieses wiederum induziert ein kohärentes Ideal

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_X.$$

Es seien \tilde{Z} das abgeschlossene Unterschema von X , das durch das Ideal \mathcal{P} definiert ist und $i : \tilde{Z} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Ein Halm \mathcal{P}_x ist entweder ein Primideal in $\mathcal{M}_{X,x}$ oder gleich $\mathcal{M}_{X,x}$, je nachdem ob x in \tilde{Z} liegt oder nicht. Man hat eine disjunkte Zerlegung

$$i^* \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{\tilde{Z}} \amalg i^* \mathcal{P},$$

wobei $\mathcal{M}_{\tilde{Z}}$ ein Untermonoid ist. Dieser definiert eine kanonische Log-Struktur auf \tilde{Z} .

Bemerkung 3.2.7. Man wird sehen, dass die Log-Schemata \tilde{Z} , \underline{Z} übereinstimmen, so dass man sinnvollerweise $\text{Star}_X(D) := \underline{Z}$ definieren wird (siehe Theorem 3.2.10).

Nun geht es zurück zu dem Beweis der Proposition.

Es seien $V \rightarrow S$, $h : U \rightarrow X \times_S V \rightarrow X$ étale Umgebungen, so dass die induzierte Abbildung $\underline{U} \rightarrow \underline{V}$ eine Karte wie in Katos Kriterium/Lemma 3.1.5 besitzt:

$$\alpha : N \rightarrow \mathcal{M}_V, \beta : M \rightarrow \mathcal{M}_U, \varphi : N \hookrightarrow M,$$

wobei $\overline{M} = \overline{\mathcal{M}_{U,u}}$ ist für einen Punkt $u \in h^{-1}(\tilde{Z})$. Dann ist das Urbild von $h^{-1}\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_U$ unter der Abbildung $M \rightarrow \mathcal{M}_U$ ein Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(M)$. Hierbei nimmt man an, dass U, V zusammenhängend sind, so dass man konstante Garben hierauf mit ihren globalen Schnitten identifizieren kann.

Weil nach Voraussetzung $\overline{\mathcal{M}_V} = N$ konstant ist, ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = N^+$. Weiterhin ist $h^{-1}(\tilde{Z})$ das durch \mathfrak{p} definierte abgeschlossene Unterschema in U . Ferner erzeugt N^+ das Nullideal in \mathcal{O}_V . Somit erhält man, dass obige Karte eine glatte Abbildung induziert

$$h^{-1}(\tilde{Z}) \rightarrow \text{Spec}((\mathcal{O}_V \otimes_N M)/\langle \mathfrak{p} \rangle) = \text{Spec}(\mathcal{O}_V[M - \mathfrak{p}]).$$

Offensichtlich ist \tilde{Z} reduziert und Katos Kriterium zeigt, dass $(\tilde{Z}, \mathcal{M}_{\tilde{Z}}) \rightarrow S$ toroidal ist.

Nach Konstruktion ist $D \subset \tilde{Z}$ eine Komponente der offenen Teilmenge

$$\tilde{D} = \{z \in \tilde{Z}; \overline{\mathcal{M}}_{\tilde{Z},z}^{\text{gp}} = 1\}.$$

Man erhält insbesondere, dass $D \rightarrow S$ klassisch glatt ist. Weiterhin bilden die Fasern $\tilde{D}_s \hookrightarrow \tilde{Z}_s$, $s \in S$ eine flache Familie toroidaler Einbettungen. Aus (Korollar 15.6.5 in [44]) folgert man dann, dass Z eine Komponente von \tilde{Z} ist und die Behauptung folgt. \square

Korollar 3.2.8. *Mit den reduzierten Unterschemastrukturen ist D klassisch glatt über S .*

Proposition 3.2.9. *Man betrachtet nach wie vor die Situation in 3.2.4.*

1. *Die Stratifizierung (D_j) erfüllt das Axiom of Frontier.*

2. Die kanonische Abbildung $\{D_j\} \rightarrow F(\underline{X})$ ist eine Bijektion der Strata von X auf die Punkte von $F(\underline{X})$, die über den abgeschlossenen Punkten von $F(\underline{S})$ liegen.

Beweis. Zu 1.) Man muß zeigen, dass aus $D_i \rightsquigarrow D_j$ folgt $D_i^{\text{cls}} \supset D_j$ (siehe Definition 2.3.6).

Dies ist eine étale lokale Frage. Mit Katos Kriterium/Lemma 3.1.5 reduziert man auf den Fall $\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_N M)$. Die Strata D_j sind dann die Komponenten von

$$\text{Spec}((\mathcal{O}_X/\mathfrak{p})[(M - \mathfrak{p})^{-1}]) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_S[(M - \mathfrak{p})^{\text{gp}}]),$$

für Primideale $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(M)$ mit $\mathfrak{p} \cap N = N^+$ und einem fs Monoid M mit $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$. Somit sind die D_j Strata des torischen Schemas $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$ (siehe 5.2.2). Weil die Stratifizierung von $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$ das Axiom of Frontier erfüllt, folgt die Behauptung.

Zu 2.) Für ein Stratum D_j schreibt man $\overline{\mathcal{M}}_{D_j} = M_j$. Man muß zwei Dinge zeigen:

1. Für alle Primideale $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(M_j)$, die über N^+ liegen, existiert eine Spezialisierung $D_i \rightsquigarrow D_j$, so dass für den Kern der induzierten Kospezialisierung $\alpha_{ij}^\sharp : M_j \rightarrow M_i$ (siehe Konstruktion 2.3.13) gilt $\text{Ker}(\alpha_{ij}^\sharp) = M_j - \mathfrak{q}$.
2. Die Spezialisierung $D_i \rightsquigarrow D_j$ in 1.) ist eindeutig durch \mathfrak{q} bestimmt.

Die erste Bedingung ist étale lokaler Natur. Man reduziert daher wie oben auf den Fall $\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_N M)$. Dann ist die erste Bedingung aber evident.

Für die zweite Behauptung nimmt man an, dass Strata D_1, D_2 existieren, die beide nach D spezialisieren und deren Kospezialisierungen isomorph sind. Dann werden die Strata D_i unter der kanonischen Abbildung $X \rightarrow F(\underline{X})$ auf denselben Punkt $d \in F(\underline{X})$ abgebildet.

Wie im Beweis von Proposition 3.2.5 induziert d ein abgeschlossenes Unterschema

$$\tilde{Z} \subset X.$$

Setzt man $Z_i = D_i^{\text{cls}}$, so besteht die Faser $Z_{i,s}$ über einem Punkt $s \in S$ aus irreduziblen Komponenten von \tilde{Z}_s . Weiterhin ist nach 1.) D enthalten in

$$Z_1 \cap Z_2.$$

Man erhält somit, dass \tilde{Z}_s in dem Fall $D_s \neq \emptyset$ nicht normal ist. Der Beweis von Proposition 3.2.5 zeigt aber, dass \tilde{Z}_s eine toroidale Einbettung ist. Dies ist ein Widerspruch! \square

Das nächste Theorem faßt die bisherigen Ergebnisse in diesem Abschnitt zusammen. Die Situation und Notation sei hierfür immer noch wie in 3.2.4.

Theorem 3.2.10. 1. Das Ideal \mathcal{P}_D aller Schnitte in \mathcal{M}_X , die auf D verschwinden, ist kohärent und das hierdurch definierte abgeschlossene Unterschema in X ist der Abschluß von D mit der reduzierten Unterschemastruktur.

2. Es seien $i : Z = D^{\text{cls}} \hookrightarrow X$ die Inklusion und \mathcal{M}_Z der Untermonoid von $i^*\mathcal{M}_X$ aller Schnitte, die auf D invertierbar sind. Dann ist das Log-Schema

$$\text{Star}_X(D) := (Z, \mathcal{M}_Z)$$

toroidal über S . Weiterhin hat man eine kanonische disjunkte Zerlegung

$$i^* \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Z \amalg i^* \mathcal{P}_D.$$

3. Ist $d \in F(\underline{X})$ der Punkt, auf den das Stratum D abgebildet wird, so gilt

$$F(\text{Star}_X(D)) = \text{Star}_{F(\underline{X})}(d).$$

4. Es existiert eine kanonische Bijektion der Strata von X auf die Punkte von $F(\underline{X})$, die über den abgeschlossenen Punkten von $F(\underline{S})$ liegen.

5. Die Stratifizierung von X erfüllt das Axiom of Frontier.

6. Betrachtet man die Kategorie der Paare (\underline{X}, D) mit offensichtlichen Morphismen, so ist die Zuordnung $(\underline{X}, D) \mapsto \text{Star}_X(D)$ ein Funktor.

7. Falls $(\underline{Y}, E) \rightarrow (\underline{X}, D)$ eine Log-Modifikation (bzw. Log-Aufblasung) zugrunde liegt, so trifft dies auch auf die induzierte Abbildung $\text{Star}_Y(E) \rightarrow \text{Star}_X(D)$ zu.

Beweis. Die Aussagen 1.) - 5.) folgen aus den Propositionen 3.2.5 und 3.2.9.

Die sechste Aussage erhält man aus den Definitionen.

Die letzte Aussage reduziert man auf affine Log-Modifikationen $\underline{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{N})$, wobei \mathcal{N} ein quasikohärenter \mathcal{M}_X -Untermonoid von $\mathcal{M}_X^{\text{gp}}$ ist (siehe Konstruktion 2.5.8). Das kohärente Ideal \mathcal{P}_E ist induziert durch ein kohärentes \mathcal{M}_X -Bruchideal \mathcal{P} , das ein Ideal in \mathcal{N} ist mit $\mathcal{P}_D = \mathcal{M}_X \cap \mathcal{P}$. Aus den Definitionen erhält man dann

$$\text{Star}_X(D) = \text{Spec}(\mathcal{O}_X / \langle \mathcal{P}_X \rangle), \quad \mathcal{M}_{\text{Star}_X(D)} = i^* \mathcal{M}_X - i^* \mathcal{P}_D,$$

wobei $i : \text{Star}_X(D) \hookrightarrow X$ die Inklusion ist. Somit ist $\text{Star}_Y(E)$ die Log-Modifikation

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{\text{Star}_X(D)} \otimes_{\mathcal{M}_{\text{Star}_X(D)}} (i^* \mathcal{N} - i^* \mathcal{P})).$$

Die Aussage über die Log-Aufblasungen ist mehr oder weniger trivial. \square

Über log-glatte Abbildungen, die zusätzlich im klassischen Sinne eigentlich sind, kann man noch mehr sagen. Die nächste Proposition faßt einige Eigenschaften zusammen.

Proposition 3.2.11. *Es sei $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ log-glatt und im klassischen Sinne eigentlich. Man nimmt an, dass die Log-Strukturen $\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_S$ keine Selbstüberschneidung haben. Es seien $(D_i), (E_k)$ die kanonischen Stratifizierungen von X bzw. S .*

1. Die Strata $D_i \subset X$ werden surjektiv auf Strata $E_k \subset S$ abgebildet.
2. Die Einschränkungen von $f_* \overline{\mathcal{M}}_X$ auf die Strata von S sind lokal konstant und haben endliche Monodromie. Somit ist $f_* \overline{\mathcal{M}}_X$ eine konstruierbare étale S -Garbe.
3. Die Bildung von $f_* \overline{\mathcal{M}}_X$ kommutiert mit strikten Basiswechseln, d.h. ist

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} \times_S S' & \xrightarrow{g'} & \underline{X} \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm, wobei S, S' die triviale Log-Struktur tragen, so gilt

$$g^{-1}f_*\overline{\mathcal{M}}_X = f'_*(g')^{-1}\overline{\mathcal{M}}_X.$$

4. Die Aussagen 2.) und 3.) gelten für $\overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}}$ anstelle von $\overline{\mathcal{M}}_X$.

Beweis. Zu 1.) Weil f die Stratifizierungen respektiert, kann man annehmen, dass S nur ein Stratum hat. Dann ist $\overline{\mathcal{M}}_S$ konstant und S ist zusammenhängend.

Das unterliegende Schema Z_j von $\text{Star}_X(D_j)$ ist nach Theorem 3.2.10 eigentlich und flach über S^{red} . Somit ist die Abbildung f offen und abgeschlossen und somit ist

$$f(Z_j) = S.$$

Nun bilden die Fasern $D_{j,s} \hookrightarrow Z_{j,s}$, $s \in S$ eine flache Familie toroidaler Einbettungen. Hieraus folgt die erste Behauptung, denn für eine toroidale Einbettung gilt

$$D_{j,s} = \emptyset \iff Z_{j,s} = \emptyset.$$

Zu 3.) Ganz allgemein hat man eine natürliche Transformation

$$g^{-1}f_* \Rightarrow f'_*(g')^{-1}.$$

Für den Beweis, dass die resultierende kanonische Abbildung

$$g^{-1}f_*\overline{\mathcal{M}}_X \rightarrow f'_*(g')^{-1}\overline{\mathcal{M}}_X$$

ein Isomorphismus ist, reicht es die folgende Situation zu betrachten:

1. S ist das Spektrum eines strikt henselschen lokalen Rings (R, \mathfrak{m}) .
2. S' ist der abgeschlossene Punkt in S .

Es reicht zu zeigen, dass die induzierte Abbildung der globalen Schnitte

$$\Gamma(X, \overline{\mathcal{M}}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_0, \overline{\mathcal{M}}_{X_0}) \quad \text{mit} \quad \underline{X}_0 = \underline{X} \otimes_R R/(\mathfrak{m})$$

ein Isomorphismus ist. Man betrachtet hierfür die Strata von X , die über dem eindeutigen abgeschlossenen Stratum E von S liegen. Es genügt zu zeigen, dass für jedes solche Stratum $D \subset X$ die spezielle Faser von D nichtleer und zusammenhängend ist.

Die erste Bedingung ist nach 1.) erfüllt. Die zweite sieht man wie folgt:

Nach Theorem 3.2.10 ist der Abschluß D^{cls} flach über E und hat reduzierte geometrische Fasern. Weiterhin ist D^{cls} zusammenhängend, eigentlich und die Basis S ist nach Voraussetzung strikt lokal. Aus (Proposition 1.2 in [47], Exposé X) erhält man hieraus, dass die spezielle Faser von D^{cls} und damit auch die von D zusammenhängend ist.

Zu 2.) Der Beweis von 3.) zeigt, dass die Einschränkungen von $f_*\overline{\mathcal{M}}_X$ auf die Strata von S lokal konstant sind. Es sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von dem Stratum E_k . Dann ist die Faser $(f_*\overline{\mathcal{M}}_X)_{\bar{s}}$ ein endlich erzeugter scharfer Monoid und besitzt somit eine endliche Automorphismengruppe. Daher ist die Monodromie von $f_*\overline{\mathcal{M}}_X|_{E_k}$ endlich.

Zu 4.) Den Beweis von 3.) kann man übernehmen. Ebenso sieht man, dass die Einschränkungen auf die Strata von S lokal konstant sind. Die Behauptung über die Monodromie erhält man in obiger Notation aus der Isomorphie

$$(f_*\overline{\mathcal{M}}_X)_{\bar{s}}^{\text{gp}} \simeq (f_*\overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}})_{\bar{s}}.$$

□

3.3 Log-Glattheit und Saturiertheit

In diesem Abschnitt werden *saturierte Abbildungen von Log-Schemata* studiert. Solche Abbildungen wurden schon von Tsuij in [41] untersucht. Interessant sind die log-glatten, saturierten Abbildungen, die besonders schöne Eigenschaften haben (Proposition 3.3.7). Ein Hauptresultat in diesem Abschnitt ist Theorem 3.3.17. Hiernach erreicht man durch einen *guten* fs Basiswechsel, dass eine Abbildung saturiert ist.

Konvention. *In diesem Abschnitt seien alle Schemata lokal noethersch und die Log-Strukturen vom Typ fs, wenn nichts anderes explizit bemerkt wird.*

Definition 3.3.1. 1. *Es seien N, M integrale (bzw. saturierte) Monoide. Dann heißt ein Homomorphismus $N \rightarrow M$ integer (bzw. saturiert), wenn jedes Pushout $P \oplus_N M$ mit einem integralen (bzw. saturierten) Monoid P diese Eigenschaft hat.*

2. *Eine Abbildung von Log-Schemata $\psi : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ heißt integer (bzw. saturiert), wenn die Abbildungen der Halme $\mathcal{M}_{S, \psi(\bar{x})} \rightarrow \mathcal{M}_{X, \bar{x}}$ diese Eigenschaft haben.*

Die nächste Proposition faßt einige Eigenschaften integrier und saturierter Abbildungen zusammen, die im weiteren Verlauf eine Rolle spielen.

Proposition 3.3.2. 1. *Für Abbildungen von fs Log-Schemata $f_i : \underline{X}_i \rightarrow \underline{S}$, $i = 1, 2$, wobei f_1 saturiert ist, stimmt das unterliegende Schema von dem fs Faserprodukt $\underline{X}_1 \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{X}_2$ mit dem schematischen Faserprodukt $X_1 \times_S X_2$ überein.*

2. *Ein Homomorphismus integraler Monoide $\varphi : N \rightarrow M$ ist genau dann integer, wenn für alle Elemente $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2$, welche der Gleichung*

$$\varphi(n_1) \cdot m_1 = \varphi(n_2) \cdot m_2$$

genügen, Elemente $n'_i \in N$ für $i = 1, 2$ und $m' \in M$ existieren, so dass gilt

$$m_1 = \varphi(n'_1) \cdot m', \quad m_2 = \varphi(n'_2) \cdot m' \quad \text{und} \quad n_1 \cdot n'_1 = n_2 \cdot n'_2.$$

3. *Ein injektiver Homomorphismus integraler Monoide $N \rightarrow M$ ist genau dann integer, wenn für jeden Ring R die induzierte Abbildung der Monoidalgebren flach ist*

$$R[N] \hookrightarrow R[M].$$

Beweis. 1.) folgt aus der Konstruktion von fs Faserprodukten in Bemerkung 2.2.4.

Für den Beweis der zweiten Aussage siehe (4.1 in [19]).

Zu 3.) Die Implikation "⇐" folgt aus der Tatsache, dass der Funktor $M \mapsto R[M]$ mit Koprodukten vertauscht, d.h. $R[M \oplus_N P] = R[M] \otimes_{R[N]} R[P]$.

Die andere Richtung ist etwas schwieriger: Man schreibt für die induzierte Abbildung

$$\psi : A = R[N] \hookrightarrow R[M] = B.$$

Bekanntlich genügt es zeigen, dass für jedes endlich erzeugte Ideal $I \subset A$ gilt

$$I \otimes_A B \simeq I \cdot B.$$

Es sei ein Element $\zeta = \sum_{m \in M} a_m \otimes m$ in $I \otimes B$ gegeben mit

$$\sum_{m \in M} \psi(a_m) \cdot m = 0.$$

Man zeigt $\zeta = 0$ durch Induktion nach der Anzahl nichttrivialer Koeffizienten a_m .

Existiert nur ein Koeffizient $a_m \neq 0$, so folgt die Behauptung der Injektivität von

$$N \hookrightarrow M, n \mapsto \psi(n) \cdot m.$$

Existieren Koeffizienten $a_{m_1}, a_{m_2} \neq 0$, so folgt aus der Gleichung

$$\sum_{m \in M} \psi(a_m) \cdot m = 0,$$

dass Elemente $n_1, n_2 \in N$ existieren mit der Eigenschaft

$$\psi(n_1) \cdot m_1 = \psi(n_2) \cdot m_2.$$

Nach dem expliziten Kriterium für Integrität in 1.) existieren Elemente $n'_1, n'_2 \in N$ und $m' \in M$ mit $m_1 = \psi(n'_1) \cdot m'$ und $m_2 = \psi(n'_2) \cdot m'$.

Die Behauptung folgt durch Anwendung der Induktionshypothese auf die Darstellung

$$\zeta = \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq m_1, m_2}} a_m \otimes m + (n'_1 a_{m_1} + n'_2 a_{m_2}) \otimes m'.$$

□

3.3.3. Als nächstes sollen *geometrische Kriterien* für die Eigenschaften Saturiertheit und Integrität hergeleitet werden. Man betrachtet hierfür die folgende Situation:

Es sei $\varphi : N \hookrightarrow M$ ein injektiver Homomorphismus scharfer fs Monoide.

Man betrachtet die induzierte Abbildung der dualen Polyederkegel

$$\varphi^\vee : \Omega = \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0}) \longrightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{\geq 0}) = \Sigma$$

und weiterhin die induzierte Abbildung von Log-Schemata

$$\psi : \underline{X} = \text{Spec}(\mathbb{C}[N]) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) = \underline{Y},$$

wobei die Log-Strukturen die kanonischen sind.

Die Strata von X entsprechen eindeutig den (abgeschlossenen) Zellen von Ω . Das Stratum D_ω zu der Zelle $\omega \subset \Omega$ ist isomorph zu dem Torus $\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^r$ der Dimension

$$r = \dim(\Omega) - \dim(\omega).$$

Entsprechend bezeichne $E_\sigma \subset Y$ das Stratum zu einer Zelle $\sigma \subset \Sigma$.

Es gilt nun das folgende Kriterium für Integrität:

Proposition 3.3.4. *Die Notation sei wie in den obigen Ausführungen.*

1. Ist $\varphi : N \hookrightarrow M$ integer, so bildet φ^\vee die Zellen in Ω surjektiv auf Zellen in Σ ab.
2. Nimmt man zusätzlich an, dass $N \simeq \mathbb{N}^r$ ein freier Monoid ist und erfüllt φ^\vee die Bedingung in 1.), so ist der Homomorphismus $\varphi : N \hookrightarrow M$ integer.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass nach Proposition 3.3.2 gilt:

$$\varphi \text{ ist integer} \iff \psi \text{ ist flach.}$$

Zu 1.) Es seien $\sigma^\circ \subset \Sigma$, $\omega^\circ \subset \Omega$ (offene) Zellen, so dass ω° unter φ^\vee nicht surjektiv nach σ° abgebildet wird. Man nimmt an, dass keine echte Seite von ω nach σ° abgebildet wird. Dann wird ω injektiv abgebildet und es gilt für die Dimensionen

$$\dim(\omega) < \dim(\sigma).$$

Die induzierte Abbildung der entsprechenden Strata $D_\omega \rightarrow E_\sigma$ ist glatt und surjektiv. Für die Dimension der Fasern von $\psi^{-1}(y)$, $y \in E_\sigma$ erhält man

$$\dim(\psi^{-1}(y)) \geq [\dim(\Omega) - \dim(\omega)] - [\dim(\Sigma) - \dim(\sigma)] > \dim(\Omega) - \dim(\Sigma).$$

Auf der anderen Seite ist die Dimension der generischen Faser von ψ gleich

$$\dim(\Omega) - \dim(\Sigma).$$

Dies steht im Widerspruch zur Flachheit von ψ . Denn hiernach ist die Dimension der Fasern von ψ konstant (Theorem 15.1 in [27]).

Zu 2.) Mit der Argumentation in 1.) folgert man, dass die Dimension der Fasern von $\psi : X \rightarrow Y$ konstant gleich $\dim(\Omega) - \dim(\Sigma)$ ist. Ferner ist Y regulär und X Cohen-Macaulay. Somit ist nach dem Kriterium in (Theorem 23.1 in [27]) die Abbildung ψ flach. \square

Man benötigt ein paar Definitionen. Die Notation sei hierfür wie in 3.3.3.

Den dualen Monoid zu dem fs Monoid M definiert man durch

$$M^\vee := \text{Hom}(M, \mathbb{N}).$$

Dann ist M^\vee ein Untermonoid in dem Polyederkegel $\Omega = \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$ und es gilt

$$\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot M^\vee.$$

Ein Element $\nu \in M^\vee$ heißt primitiver Vektor, wenn gilt

$$n \cdot \tilde{\nu} = \nu \text{ für } \tilde{\nu} \in M^\vee, n \in \mathbb{N} \implies n = 1, \nu = \tilde{\nu}.$$

Die primitiven Kantenvektoren ν_i von dem Polyederkegel Ω sind die primitiven Vektoren, welche die Kanten (= eindimensionalen Zellen) $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \nu_i$ erzeugen. Entsprechend seien μ_j die primitiven Kantenvektoren von dem Polyederkegel Σ .

Für das Folgende nimmt man nun an, dass der Homomorphismus $\varphi : N \hookrightarrow M$ integer ist. Nach obiger Proposition 3.3.4 sind die Bilder primitiver Kantenvektoren von Ω unter φ^\vee ganzzahlige Vielfache primitiver Kantenvektoren von Σ :

$$\varphi^\vee(\nu_i) = e \cdot \mu_j \text{ für ein } e \in \mathbb{N}.$$

Es gilt nun das folgende Kriterium für Saturiertheit:

Proposition 3.3.5. *Die Notation sei wie in den obigen Ausführungen.*

1. Ist $\varphi : N \hookrightarrow M$ saturiert, so gilt für alle primitiven Kantenvektoren ν_i von Ω :

$$\varphi^\vee(\nu_i) = e \cdot \mu_j \quad \text{mit } e \in \{0, 1\}.$$

2. Nimmt man zusätzlich an, dass $N \simeq \mathbb{N}^r$ ein freier Monoid ist und erfüllt φ^\vee die Bedingung in 1.), so ist der Homomorphismus $\varphi : N \hookrightarrow M$ saturiert.

Beweis. Zu 1.) Man reduziert die Behauptung leicht auf den Fall

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto e \cdot n.$$

Man sieht, dass die Saturierung des Pushouts von Monoiden

$$\mathbb{N} \oplus_{\varphi, \mathbb{N}, \varphi} \mathbb{N}$$

isomorph ist zu $\mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. Somit ist φ nicht saturiert für $e > 1$.

Zu 2.) Es sei $N \rightarrow P$ ein Homomorphismus scharfer saturierter Monoide und

$$Q = P \oplus_N M.$$

Es gilt zu zeigen, dass der integrale Monoid Q saturiert ist. Weil das Pushout von Monoiden mit induktiven Limites vertauscht, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass P fs ist. Dann ist Q ein ausgezeichnete Monoid.

Es reicht nun zu zeigen, dass die Monoidalgebra $\mathbb{C}[Q]$ normal ist. Aus dem Kriterium in (Theorem/Korollar 23.3 in [27]) folgt, dass $\mathbb{C}[Q]$ Cohen-Macaulay ist. Es bleibt zu zeigen, dass $Z = \text{Spec}(\mathbb{C}[Q])$ nichtsingulär ist in Kodimension ≤ 1 .

Für einen Punkt $z \in Z$ der Kodimension 1 kann man folgende Fälle unterscheiden:

1. Es liegt z in dem offenen Teil $\text{Spec}(\mathbb{C}[Q]^{\text{gp}})$.
2. Es existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(Q)$ der Höhe 1 mit

$$z \in \text{Spec}(\mathbb{C}[Q]/\langle \mathfrak{q} \rangle).$$

Hierbei ist die Höhe eines Primideals wie in der kommutativen Algebra definiert. Weil die Saturierung $Q \hookrightarrow Q^{\text{sat}}$ einen Homeomorphismus der Spektren induziert, ist die Höhe nichts anderes als die Dimension der entsprechenden Zelle in dem Polyederkegel

$$\text{Hom}(Q, \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

In dem ersten Fall ist Z trivialerweise nichtsingulär in z .

Den zweiten Fall kann man via Induktion annehmen $\mathfrak{q} \cap N = N^+$. Es seien

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{q} \cap M$$

und $\omega \subset \Omega$ die entsprechende Zelle. Eine geometrische Überlegung zeigt, dass ω bijektiv auf Σ abgebildet wird, weil \mathfrak{q} die Höhe 1 hat. Weil $\Sigma \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}^r$ von seinen primitiven Kantenvektoren erzeugt wird, stellt somit φ einen Isomorphismus her

$$N \xrightarrow{\sim} M/(M - \mathfrak{m}).$$

Setzt man $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap P$, so erhält man folglich einen Isomorphismus

$$P/(P - \mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} Q/(Q - \mathfrak{q}).$$

Hieraus folgt dann die Behauptung. □

3.3.6. Für die nächste Proposition sei an ein paar grundsätzliche Begriffe erinnert:

Ein Schema X von endlichem Typ über einem Körper k besitzt eine *Normal-Crossing Singularität* in einem Punkt $x \in X$, wenn X étale lokal in x isomorph ist zu

$$\mathrm{Spec}(k[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \cdots t_r)), \quad r \leq n.$$

Ein *Normal-Crossing Schema* hat in allen Punkten Normal-Crossing Singularitäten.

Es sei weiterhin daran erinnert, dass ein reduziertes Schema V von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k *seminormal* heißt, wenn jede homeomorphe Abbildung $W \rightarrow V$ ein Isomorphismus ist (Definition 1.3 in [10]).

Die nächste Proposition zeigt, dass Saturiertheit und Log-Glattheit von $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ schöne Eigenschaften der unterliegenden Abbildung $X \rightarrow S$ implizieren.

Proposition 3.3.7. *Für eine log-glatte, saturierte Abbildung $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ gilt:*

1. X ist im klassischen Sinne flach über S .
2. Die geometrischen Fasern von $X \rightarrow S$ sind Cohen-Macaulay.
3. Die geometrischen Fasern von $X \rightarrow S$ haben in Punkten der Kodimension ≤ 1 Normal-Crossing Singularitäten.
4. Die geometrischen Fasern von $X \rightarrow S$ sind seminormal.
5. Die Eigenschaften a) - c) sind stabil unter fs Basiswechseln.

Beweis. Zu 5.) Dies folgt aus der Tatsache, dass die Eigenschaften Saturiertheit und Log-Glattheit stabil sind unter fs Basiswechseln.

Zu 1.) Flachheit ist eine étale lokal Eigenschaft. Die Behauptung folgt daher aus Proposition 3.3.2 und Katos Kriterium für Log-Glattheit.

Die Behauptungen 2.) und 3.) reduziert man auf den Fall, dass \underline{S} das Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k mit der Standard Log-Struktur $\pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}$ ist.

Weil die Behauptungen étale lokaler Natur sind, reduziert man sie mit Katos Kriterium/Lemma 3.1.5 auf den Fall, dass X das Spektrum der k -Algebra $k[M]/\langle \pi \rangle$ ist, wobei $\pi^{\mathbb{N}} \hookrightarrow M$ injektiv und saturiert ist und M ein fs Monoid mit $M^{\mathrm{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$ ist.

Zu 2.) Die Monoidalgebra $k[M]$ ist Cohen-Macaulay und normal. Somit ist auch der Quotientenring durch ein Hauptideal $k[M]/\langle \pi \rangle$ Cohen-Macaulay.

Zu 3.) Es sei $x \in X$ ein Punkt der Kodimension 1. Dann hat x als Punkt in der torischen Varietät $\text{Spec}(k[M])$ die Kodimension 2, insbesondere ist der Halm

$$P = \overline{\mathcal{M}}_{X,x}.$$

ein scharfes fs Monoid der Dimension ≤ 2 . Der induzierte Homomorphismus $\varphi : \pi^{\mathbb{N}} \hookrightarrow P$ ist saturiert. Man unterscheidet nun die folgenden Fälle:

In dem Fall $P = \mathbb{N}$ ist φ ein Isomorphismus, so dass x ein glatter Punkt in X ist. In dem Fall $\dim(P) = 2$ seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \text{Spec}(P)$ die Primeideale der Höhe 1. Sind dann

$$v_i : P \rightarrow P/(P - \mathfrak{p}_i) = \mathbb{N}$$

die induzierten *diskreten Bewertungen*, so gilt wegen der Saturiertheit

$$e_i := v_i(\varphi(\pi)) \in \{0, 1\}.$$

Man unterscheidet nun die Fälle, dass ein oder beide $e_i = 0$ sind. Im ersten Fall sei ohne Einschränkung $e_1 = 0$. Dann findet man ein $t \in P$ mit $v_1(t) = 1, v_2(t) = 0$. Dann ist

$$P \simeq t^{\mathbb{N}} \oplus \pi^{\mathbb{N}}$$

und x somit ein glatter Punkt. Im zweiten Fall findet man Elemente $t_1, t_2 \in P$ mit $v_1(t_1) = v_2(t_2) = e, v_1(t_2) = v_2(t_1) = 0$ für ein minimales $e \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Gleichung $t_1 \cdot t_2 = \pi^e$ und man sieht leicht, dass P isomorph ist zu dem Pushout

$$\mathbb{N}^2 \oplus_{\mathbb{N}} \pi^{\mathbb{N}}, \quad 1 \mapsto (1, 1), \quad 1 \mapsto \pi^e.$$

Somit ist x eine Normal-Crossing Singularität in X .

Zu 4.) Zusammen mit 2.) und 3.) folgt dies aus (Korollar 2.7, Lem 3.10 in [10]). □

Als nächstes definiert man eine Reihe von Eigenschaften von Morphismen.

Die folgende Definition geht auf Kato zurück (Definition 4.1.1 in [20]).

Definition 3.3.8. *Es sei $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ eine Abbildung von fs Log-Schemata.*

1. *Dann heißt f log-flach, wenn fppf lokal eine Karte existiert*

$$\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_X, \quad \beta : N \rightarrow \mathcal{O}_S, \quad \varphi : N \hookrightarrow M,$$

so dass $\varphi^{\text{gp}} : N^{\text{gp}} \hookrightarrow M^{\text{gp}}$ injektiv ist und die induzierte Abbildung

$$g : X \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_N M)$$

im klassischen Sinne flach ist.

2. *Es heißt f log-quasi-endlich, wenn in der Notation von 1.) fppf lokal eine Karte α, β, φ existiert, so dass der Quotient $M^{\text{gp}}/N^{\text{gp}}$ eine endliche Gruppe ist und die induzierte Abbildung g klassisch quasi-endlich ist.*

3. Eine log-flache und log-quasi-endliche Abbildung heißt auch log-fqe.

Bemerkung 3.3.9. Aus Katos Kriterium erhält man:

1. Log-glatte Abbildungen sind log-flach.
2. Log-étale Abbildungen sind log-fqe.

Die nächste Definition stammt wiederum von Kato [21].

Definition 3.3.10. 1. Ein injektiver Homomorphismus von fs Monoiden $N \hookrightarrow M$ heißt Kummer, wenn ein $e \in \mathbb{N}$ existiert mit $e \cdot M \subset N$.

2. Eine Abbildung von fs Log-Schemata $\psi : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ heißt Kummer, wenn für alle geometrischen Punkte \bar{x} von X die Abbildung $\overline{\mathcal{M}}_{S, \psi(\bar{x})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{X, \bar{x}}$ Kummer ist.
3. Eine Kummer log-fqe Abbildung von fs Log-Schemata heißt auch Ku-fqe.

Man benötigt die folgende technische Definition:

Definition 3.3.11. Es seien \underline{S} ein fs Log-Schema und $\alpha : N \rightarrow \mathcal{M}_S$ eine Karte.

1. Dann definiert man für eine positive natürliche Zahl e das Log-Schema

$$\underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}] := \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_{\alpha, \mathbb{N}^r, \varphi_e} \mathbb{N}^r)$$

wobei $\varphi_e : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}^r$ die Abbildung $n \mapsto e \cdot n$ ist.

2. Ist speziell $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}_S$ und π das Bild von $\alpha(1)$ in $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, so schreibt man

$$\underline{S}[\sqrt[e]{\pi}] := \underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}],$$

d.h. man adjungiert die e -te Wurzel von dem Parameter π (siehe Beispiel 2.1.8).

3. Allgemeiner definiert man für ein Log-Schema \underline{X} über \underline{S}

$$\underline{X}[\sqrt[e]{\alpha}] := \underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}] \quad \text{bzw.} \quad \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}] := \underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}[\sqrt[e]{\pi}].$$

Bemerkung 3.3.12. Die Abbildung $\underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}] \rightarrow \underline{S}$ ist surjektiv und Ku-fqe.

Beispiel 3.3.13. Es sei (R, π) ein diskreter Bewertungsring mit der Standard Log-Struktur. Dann ist das unterliegende Schema von $\underline{R}[\sqrt[e]{\pi}]$ gerade die klassische Kummer-Erweiterung

$$R[T]/\langle T^e - \pi \rangle.$$

Damit man mit fs Log-Schemata vernünftig arbeiten kann, benötigt man einen Ersatz für die klassische fppf Topologie. Die folgende Definition erweist sich als sinnvoll:

Definition 3.3.14. Es sei \underline{S} ein fs Log-Schema.

Der Kummer-log-flache Situs $\mathbf{Ku}\text{-fqe}(\underline{S})$ hat als Objekte die fs Log-Schemata \underline{X} über \underline{S} und die Morphismen sind die offensichtlichen. Die Topologie auf $\mathbf{Ku}\text{-fqe}(\underline{S})$ wird erzeugt von allen surjektiven Ku-fqe Familien $(\underline{X}_i \rightarrow \underline{X})$ über \underline{S} .

Bemerkung 3.3.15. Für die Wohldefiniertheit der Ku-fqe-Topologie benötigt man, dass Surjektivität stabil ist unter surjektiven Ku-fqe fs Basiswechseln.

Dies folgt aus Nakayamas 3-Punkte Lemma in (2.2.2 in [33]).

Sehr wichtig ist das folgende Theorem von Kato (Theorem 3 in [21]).

Theorem 3.3.16. Die Topologie auf $\mathbf{Ku}\text{-fqe}(\underline{S})$ ist größer als die kanonische Topologie, d.h. für ein fs Log-Schema \underline{X} über \underline{S} hat man eine Ku-fqe Garbe:

$$\text{Mor}_{\underline{S}}(\cdot, \underline{X})$$

Das nächste Theorem ist vor allem im Kontext mit Proposition 3.3.7 von Bedeutung.

Theorem 3.3.17. Es sei $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ein quasikompakter Morphismus von fs Log-Schemata.

1. Ist \underline{S} quasikompakt, so existiert eine Log-Aufblasung $\underline{S}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{S}$, so dass gilt:

- (a) Die Log-Struktur \mathcal{M}_S hat keine Selbstüberschneidung.
- (b) \underline{S} ist kombinatorisch regulär (siehe Proposition 2.5.13).
- (c) Die induzierte Abbildung $\underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{S}_{\mathcal{I}}$ ist integer.

2. Man nimmt zusätzlich an, dass $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ die Bedingungen b) + c) in 1.) erfüllt.

Dann existiert ein surjektiver Kummer Ku-fqe Morphismus $\underline{S}' \rightarrow \underline{S}$, so dass die induzierte Abbildung $\underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}' \rightarrow \underline{S}'$ saturiert ist.

Beweis. Zu 1.) Die erste Aussage ist im Wesentlichen (Theorem 3.6 in [17]). Der Beweis in loc. cit. und insbesondere die Konstruktion von $\underline{S}_{\mathcal{I}}$ ist aber unvollständig.

Mit den Methoden in dieser Arbeit kann man den Beweis in loc. cit. korrigieren:

Mit Proposition 2.5.13 reduziert man den Fall, dass \mathcal{M}_S keine Selbstüberschneidung hat. Man kann dann den assoziierten Polyederkegelkomplex $\text{Keg}(\underline{S})$ betrachten. Für einen geometrischen Punkt \bar{x} von X definiert man den Polyederkegel

$$\sigma_{\bar{x}} = \text{Hom}(\mathcal{M}_{X, \bar{x}}, \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Das Bild der Abbildung $\varphi_{\bar{x}} : \sigma_{\bar{x}} \rightarrow \text{Keg}(\underline{S})$ ist ein rationaler Polyederkegel. Man konstruiert mit Proposition 2.5.13 leicht eine projektive rationale Unterteilung $\Sigma \hookrightarrow \text{Keg}(\underline{S})$, welche die $\varphi_{\bar{x}}(\sigma_{\bar{x}})$ verfeinert und so dass $\underline{S} \times_{\text{Keg}(\underline{S})} \Sigma$ kombinatorisch regulär ist.

Das Kriterium in Proposition 3.3.4 zeigt dann, dass die induzierte Abbildung

$$\underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} (\underline{S} \times_{\text{Keg}(\underline{S})} \Sigma) \rightarrow \underline{S} \times_{\text{Keg}(\underline{S})} \Sigma$$

integer ist und die Behauptung folgt. Man beachte: Entsteht $\underline{S} \times_{\text{Keg}(\underline{S})} \Sigma$ durch Log-Aufblasung an an einem Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_S$, so ist das Log-Schema auf der linken Seite die Log-Aufblasung von \underline{X} an der Saturierung des Pullbacks von \mathcal{I} .

Zu 2.) Man kann nach einem strikt étalen Basiswechsel annehmen, dass eine Karte $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}_S$ existiert und S quasikompakt ist. Man betrachtet die surjektiven, Ku-fqe

Abbildungen $\underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}] \rightarrow \underline{S}$ in Definiton 3.3.11. Das Kriterium in Proposition 3.3.5 zeigt dann, dass für ein $e \in \mathbb{N}$ mit genügend vielen Teilern die induzierte Abbildung

$$\underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}] \rightarrow \underline{S}[\sqrt[e]{\alpha}]$$

saturiert ist und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 3.3.18. Es sei $U \hookrightarrow X$ eine toroidale Einbettung über einem diskreten Bewertungsring (R, π) mit den kanonischen Log-Strukturen. Dann ist das unterliegende Schema von $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]$ die Normalisierung von $X \otimes_R R[\sqrt[e]{\pi}]$. Somit ist Theorem 3.3.17 in Verbindung mit Proposition 3.3.7 eine Verallgemeinerung von (§3 in [22], Kapitel II).

3.4 Semi-Stabilität

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften von Abbildungen von Log-Schemata wie *Semi-Stabilität* und *Vertikalität* und die Zusammenhänge mit Log-Glattheit untersucht. Beide Begriffe sind Verallgemeinerungen klassischer Begriffe in [22].

Definition 3.4.1. Eine Abbildung $(X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (S, \mathcal{M}_S)$ log-geringter Räume oder allgemeiner monoidaler Räume heißt *vertikal*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\mathcal{M}_X^{\text{gp}} = (\mathcal{M}_X \oplus_{\mathcal{M}_S} \mathcal{M}_S^{\text{gp}})^{\times}.$$

Bemerkung 3.4.2. Ein Homomorphismus von fs Monoiden $\varphi : N \rightarrow M$ ist *vertikal*, wenn die folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Für das Pushout von Monoiden gilt $M \oplus_N N^{\text{gp}} = M^{\text{gp}}$.
2. φ induziert eine Abbildung $\text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0})^+ \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{\geq 0})^+$.
3. Das Urbild des generischen Punktes in $\text{Spec}(N)$ unter der induzierten Abbildung $\text{Spec}(M) \rightarrow \text{Spec}(N)$ ist der generische Punkt in $\text{Spec}(M)$.

Beispiel 3.4.3. Es sei $U \hookrightarrow X$ eine toroidale Einbettung über einem diskreten Bewertungsring R . Versieht man R, X mit den kanonischen Log-Strukturen, so ist \underline{X} über \underline{R} genau dann *vertikal*, wenn U die generische Faser X_{η} ist.

Konvention. Für den Rest des Abschnitts besitze \underline{S} die konstante Charakteristik

$$\overline{\mathcal{M}}_S = \pi^{\mathbb{N}}.$$

Der Einfachheit halber sei S zusammenhängend. Dann ist der assoziierte Fächer

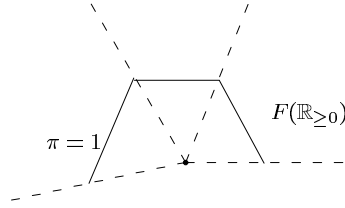
$$F(\underline{k}) = \text{Spec}(\mathbb{N}).$$

Der Parameter π wird im Folgenden als die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ aufgefasst.

3.4.4. Man benötigt im Folgenden *Polyederkomplexe (mit integraler Struktur)* (Definition 5 in [22], Kapitel II, §1). Die wichtigsten Fakten hierüber sind kurz zusammengefasst:

- Man hat eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Polyederkomplexen Pol und den vertikalen fs Fächern F über $\text{Spec}(\mathbb{N})$ vermöge der Zuordnungen

$$\{t \in F(\mathbb{R}_{\geq 0}); \pi(t) = 1\} \longleftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \text{Pol} \subset F(\mathbb{R}_{\geq 0}).$$



- Vermöge der Inklusion $\text{Pol} \subset F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ kann man rationale Unterteilungen und stückweise lineare Funktionen definieren.
- Der Polyederkomplex $\text{Pol} \subset F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ hat eine Familie diskreter Teilmengen

$$F\left(\frac{1}{e} \cdot \mathbb{N}\right) \cap \text{Pol}, \quad e \in \mathbb{N}^+.$$

- Jede Zelle $\sigma \subset \text{Pol}$ eines Polyederkomplexes trägt vermöge der integralen Struktur ein kanonisches Volumenelement bzgl. der σ ein endliches, ganzzahliges Volumen besitzt.

Ein fs Log-Schema \underline{X} Log-Schema ist genau dann vertikal über \underline{S} , wenn die induzierte Abbildung $F(\underline{X}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{N})$ vertikal ist. Daher definiert man:

Definition 3.4.5. *In dieser Situation ist der assoziierte Polyederkomplex definiert als*

$$\text{Pol}(\underline{X}) := \{t \in \text{Keg}(\underline{X}); \pi(t) = 1\}.$$

Bemerkung 3.4.6. Viele Eigenschaften von \underline{X} lassen sich durch $\text{Pol}(\underline{X})$ beschreiben. Zum Beispiel folgt aus dem Kriterium für Saturiertheit in Proposition 3.3.5:

Es ist \underline{X} über \underline{S} genau dann saturiert, wenn die nulldimensionalen Zellen des assoziierten Polyederkomplexes $\text{Pol}(\underline{X})$ enthalten sind in der Teilmenge

$$F(\underline{X})(\mathbb{N}) \cap \text{Pol}(\underline{X}).$$

3.4.7. Es sei (R, π) ein diskreter Bewertungsring und X ein reguläres Schema flach und lokal von endlichem Typ über R mit glatter generischer Faser. *Dann heißt X semi-stabil über R , wenn die spezielle Faser ein reduzierter Normal-Crossing Divisor ist.*

Es ist bekannt, dass ein semi-stabiles R -Schema étale lokal isomorph ist zu

$$\text{Spec}(R[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \cdots t_r - \pi))$$

und insbesondere eine toroidale Einbettung über R definiert.

Den Begriff der Semi-Stabilität kann man nun wie in (4.3 in [36]) verallgemeinern:

Definition 3.4.8. *Ein vertikaler, log-glatter Morphismus $f : \underline{X} \rightarrow \underline{S}$ heißt semi-stabil, wenn die folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Volumen der Zellen $\sigma \subset \text{Pol}(\underline{X})$ beträgt $1/(\dim(\sigma)!)$.*

2. Es ist \underline{X} kombinatorisch regulär und für ein $x \in X$ ist die Abbildung der Halme

$$f_x^\# : \overline{\mathcal{M}}_{S, f(x)} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{X, x}$$

die Diagonalabbildung (bzgl. eines beliebigen Isomorphismus $\overline{\mathcal{M}}_{X, x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^r$)

$$\Delta : \pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^r, \pi \mapsto (1, \dots, 1).$$

3. Der Morphismus besitzt étale lokal eine Karte der speziellen Form

$$\alpha : \pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{M}_S, \beta : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathcal{M}_X, \Delta : \pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^r,$$

so dass die induzierte Abbildung klassisch glatt ist

$$\underline{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_{\pi^{\mathbb{N}}} \mathbb{N}^r).$$

4. Die geometrischen Fasern von $X \rightarrow S$ sind Normal-Crossing Schemata.

Man zeigt, dass die Aussagen in der Definition tatsächlich äquivalent sind:

Beweis. 1.) \Rightarrow 3.) folgt aus (Lem 4 in [22], Kapitel II, §3) und 3.) \Rightarrow 2.) ist trivial.

Die Implikation 2.) \Leftarrow 3.) reduziert man mit Katos Kriterium/Lemma 3.1.5 auf

$$\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S \otimes_{\pi^{\mathbb{N}}} M),$$

wobei M ein fs Monoid ist mit $\overline{M} \simeq \mathbb{N}^r$, $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^s$ und der gegebene Homomorphismus $\varphi : \pi^{\mathbb{N}} \hookrightarrow M$ modulo Einheiten die gewünschte Form hat.

Der Quotient $\overline{M}/\pi^{\mathbb{N}}$ ist eine freie abelsche Gruppe. Somit hat der Homomorphismus φ nach Wahl einer geeigneten Spaltung $\overline{M} \rightarrow M$ eine Darstellung

$$\varphi : \pi^{\mathbb{N}} \rightarrow M^\times \oplus \overline{M}, \pi^n \mapsto (0, \overline{\varphi}(\pi^n)).$$

Weil die Einheitengruppe $M^\times \subset M^{\text{gp}}$ torsionsfrei ist, folgt die Behauptung.

Die Implikationen 3.) \Rightarrow 4.) \Rightarrow 2.) sind mehr oder weniger trivial. \square

Das folgende Theorem kann man als eine Verallgemeinerung des *Theorem über semi-stabile Reduktion* in [22] ansehen. In loc. cit. betrachtet man eine Situation wie in 3.4.7.

Theorem 3.4.9. *Es sei $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ein vertikaler, log-glatter, quasikompakter Morphismus.*

Dann existieren ein surjektiver Ku-fqe Morphismus $\underline{S}' \rightarrow \underline{S}$ und eine Log-Aufblasung $\underline{X}'_{\underline{S}'} \rightarrow \underline{X}' := \underline{X} \times_{\underline{S}}^{\text{fs}} \underline{S}'$ mit den Eigenschaften:

1. Die Log-Struktur $\mathcal{M}_{X'_{\underline{S}'}}$ hat keine Selbstüberschneidung.
2. Die induzierte Abbildung $X'_{\underline{S}'} \rightarrow \underline{S}'$ ist semi-stabil.

Beweis. A priori kann man annehmen, dass die Log-Struktur eine Karte $\pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{M}_S$ besitzt. Wie in dem Beweis von Theorem 3.3.17 reduziert man die Behauptung via fs Basiswechsel

mit $\underline{S}[\sqrt[e]{\pi}]$, $e \in \mathbb{N}^+$ auf den Fall, dass $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ saturiert ist. Dann ist für alle weiteren fs Basiswechsel mit $\underline{S}[\sqrt[e]{\pi}]$ die induzierte Abbildung von Polyederkomplexen

$$\text{Pol}(\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]) \rightarrow \text{Pol}(\underline{X})$$

ein Homeomorphismus. Nur die integrale Struktur wird transformiert. Man benutzt das schwierige kombinatorische Resultat (Theorem 4.1 in [22], Kapitel III, §4):

Es existieren eine Zahl $e \in \mathbb{N}^+$ und eine projektive rationale Unterteilung $\Sigma \hookrightarrow \text{Pol}(\underline{X})$, so dass für das Volumen der Zellen $\sigma \subset \Sigma$ gilt:

$$\text{Vol}(\sigma) = [\dim(\sigma)! \cdot e^{\dim(\sigma)}]^{-1}.$$

Die projektive rationale Unterteilung induziert eine Log-Aufblasung

$$\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}] \times_{\text{Pol}(\underline{X})} \Sigma \rightarrow \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}],$$

die das 1. Kriterium für Semi-Stabilität in Definition 3.4.8 erfüllt. \square

3.5 Kohomologie vertikaler log-glatter Varietäten

In diesem Abschnitt wird der *Ishida Komplex für log-glatter, vertikale Varietäten* definiert. Dieser ist die Verallgemeinerung des klassischen Ishida Komplexes (Abschnitt 3.2 in [34]).

Mit Hilfe des Ishida Komplexes kann man einerseits die kohärente Kohomologie von X^{red} und andererseits die Picard-Gruppe $\text{Pic}(X^{\text{red}})$ berechnen.

Konvention. - *Es sei k ein Körper, der versehen ist mit der Standard Log-Struktur*

$$\mathcal{M}_k = \pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}.$$

- *Ferner sei \underline{X} ein log-glattes, vertikales Log-Schema über \underline{k} .*
- *Die Log-Struktur \mathcal{M}_X habe keine Selbstüberschneidung.*

Die nächste Proposition liefert eine recht konkrete Beschreibung von X .

Proposition 3.5.1. 1. *Die Strata von X entsprechen eindeutig den Zellen von $\text{Pol}(\underline{X})$.*

2. *Die Strata von X sind die Komponenten aller Schnittgebilde*

$$\bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} Z_k - \bigcup_{j \notin \{i_1, \dots, i_r\}} Z_j.$$

3. *Die Reduktion X^{red} ist ein Gorenstein Schema.*

Beweis. Die erste und zweite Aussage folgen aus Theorem 3.2.10.

Zu 3.) Mit Katos Kriterium/Lemma 3.1.5 sieht man, dass X^{red} étale lokal isomorph ist zu dem Randdivisor $P - T$ einer Toruseinbettung $T \hookrightarrow P$. Hierfür benötigt man die Voraussetzung, dass das Log-Schema \underline{X} vertikal über \underline{k} ist.

Die Behauptung folgt nun aus *Ishidas Kriterium* (Abschnitt 3.2 in [34]). Denn hiernach ist der Randdivisor einer Toruseinbettung ein Gorenstein Schema. \square

Konvention. - Man ordnet die abgeschlossenen Zellen des Polyederkomplexes $\text{Pol}(\underline{X})$ nach ihrer Dimension: Es bezeichne σ_j^n die Zellen der Dimension n .

- Es bezeichne Z_j^n den Abschluß in X von dem Stratum zu der Zelle σ_j^n . Speziell seien wie zu Beginn des Abschnitts $Z_j := Z_j^0$ die irreduziblen Komponenten von X .

Es folgen einige Ausführungen über die zelluläre Kohomologie von $\text{Pol}(\underline{X})$.

- Der Komplex $\text{Pol}(\underline{X})$ ist ein regulärer CW-Komplex im Sinne von (Definition 5.4 in [26]). Man wählt für jede Zelle $\sigma \in \text{Pol}(\underline{X})$ eine Orientierung. Äquivalent hierzu ist die Wahl einer Orientierung auf dem aufgespannten Vektorraum $\mathbb{R} \cdot \sigma$.

- Für Zellen $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Pol}(\underline{X})$ mit $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) - 1$ erhält man eine *Inzidenzzahl*

$$[\sigma_1 : \sigma_2] \in \{0, \pm 1\}.$$

Hierbei ist genau dann $[\sigma_1 : \sigma_2] = 0$, wenn gilt $\sigma_1 \not\subset \sigma_2$. Weiterhin ist $[\sigma_1 : \sigma_2] = 1$ genau dann, wenn $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ist und die gewählte Orientierung von σ_1 mit der induzierten Orientierung des Randes $\partial\sigma_2$ übereinstimmt (siehe Lemma 5.6 in [26]).

- Die *zelluläre Kohomologie* $H^n(\text{Pol}(\underline{X}), \mathbb{Z})$ ist dann die Kohomologie des Komplexes

$$0 \rightarrow \prod_{\sigma_j^0} \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{\sigma_j^1} \mathbb{Z} \rightarrow \cdots \rightarrow \prod_{\sigma_j^N} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Hierbei ist N das Supremum der Dimensionen der Zellen von $\text{Pol}(\underline{X})$, möglicherweise unendlich und in diesem Fall ist der Komplex ebenfalls unendlich.

Die Korandabbildungen $\delta_n : \prod_{\sigma_i^n} \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{\sigma_j^{n+1}} \mathbb{Z}$ sind definiert durch

$$(\sigma_i^n) \mapsto \left(\sum_{\sigma_j^{n+1}} [\sigma_i^n : \sigma_j^{n+1}] \cdot \sigma_j^{n+1} \right).$$

Das wichtigste Resultat in diesem Abschnitt ist:

Proposition 3.5.2. *Nach Wahl einer Orientierung einer jeden Zelle von $\text{Pol}(\underline{X})$ existiert eine kanonische exakte Sequenz von \mathcal{O}_X -Moduln (der Ishida Komplex):*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X^{\text{red}}} \rightarrow \prod_{Z_j} \mathcal{O}_{Z_j} \rightarrow \prod_{Z_j^1} \mathcal{O}_{Z_j^1} \rightarrow \cdots \rightarrow \prod_{Z_j^N} \mathcal{O}_{Z_j^N} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Hierbei identifiziert man $\mathcal{O}_{Z_j^n}$ mit seinem direkten Bild unter $Z_j^n \hookrightarrow X^{\text{red}}$.

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{O}_X \rightarrow \prod_{Z_j} \mathcal{O}_{Z_j}$ ist gegeben durch die Einschränkungen

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Z_j}.$$

Genauso hat man für eine Inklusion von Schemata $Z_j^{n+1} \hookrightarrow Z_j^n$ die Einschränkung

$$\mathcal{O}_{Z_j^n} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_j^{n+1}}.$$

Es entsprechen $Z_j^{n+1} \subset Z_j^n$ Zellen $\sigma_i^n \subset \sigma_j^{n+1}$. Man definiert die Korandabbildung in (3.2), indem man die Einschränkung mit dem Vorzeichen $[\sigma_i^n : \sigma_j^{n+1}]$ versieht.

Die Exaktheit des Komplexes (3.2) kann man étale lokal nachweisen. Man kann hierfür die Situation wie in Proposition 3.5.1 auf den Fall reduzieren

$$X^{\text{red}} = P - T.$$

Dann ist (3.2) der klassische *torische Ishida Komplex* (Abschnitt 3.2 in [34]). \square

Korollar 3.5.3. *Es ist $H^i(X, \mathcal{O}_{X^{\text{red}}})$ isomorph zu der Hyperkohomologie*

$$\mathbb{H}^i(X, \mathcal{O}_{Z^\bullet}).$$

Hierbei ist \mathcal{O}_{Z^\bullet} der verkürzte Ishida Komplex

$$\mathcal{O}_{Z^\bullet} := [0 \rightarrow \prod_{Z_j} \mathcal{O}_{Z_j} \rightarrow \prod_{Z_j^1} \mathcal{O}_{Z_j^1} \rightarrow \dots].$$

Die folgende Proposition beschreibt die Picard-Gruppe von X^{red} :

Proposition 3.5.4. *Die irreduziblen Komponenten von X seien eigentlich. Weiterhin sei $X' = \coprod_j Z_j$ die Normalisierung von X^{red} und p, p_1, p_2 die kanonischen Abbildungen:*

$$p : X' \rightarrow X^{\text{red}}, \quad p_i : X' \times_{X^{\text{red}}} X' \rightarrow X^{\text{red}}$$

Dann sitzt die Picard-Gruppe von X^{red} in der kanonischen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow H^1(\text{Pol}(\underline{X}), k^\times) \rightarrow \text{Pic}(X^{\text{red}}) \rightarrow \{\mathcal{L}' \in \text{Pic}(X'); p_1^* \mathcal{L}' = p_2^* \mathcal{L}'\}.$$

Beweis. Ist \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf X , so erfüllt $\mathcal{L}' := p^* \mathcal{L}$

$$p_1^* \mathcal{L}' \simeq p_2^* \mathcal{L}'.$$

Man nimmt nun an, dass die invertierbare Garbe \mathcal{L}' trivial ist. Dann sind insbesondere die Einschränkungen von \mathcal{L} auf die Unterschemata Z_j^n trivial.

Man wählt Trivialisierungen $\varphi_{\sigma_j^0} : \mathcal{O}_{Z_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{Z_j}$. Weil die Komponenten eigentlich sind, unterscheiden sich die Trivialisierungen $Z_l^1 \subset Z_i \cap Z_j$ um einen Faktor in $\zeta_{\sigma_l^1} \in k^\times$

$$\varphi_{\sigma_i^0} = \zeta_{\sigma_l^1} \cdot \varphi_{\sigma_j^0}.$$

Hierbei gelte für die Orientierungen der Zellen

$$[\sigma_i^0 : \sigma_l^1] = 1, \quad [\sigma_j^0 : \sigma_l^1] = -1.$$

Die Elemente $\zeta_{\sigma_l^1}$ bilden einen 1-Kozykel bzgl. der zellüären Kohomologie von $\text{Pol}(\underline{X})$ und seine Klasse $\zeta \in H^1(\text{Pol}(\underline{X}), k^\times)$ ist eindeutig durch \mathcal{L} bestimmt.

Man nimmt nun an, dass ζ trivial ist. Es gilt zu zeigen, dass \mathcal{L} ebenfalls trivial ist. Durch Tensorierung des Ishida Komplexes (3.2) mit \mathcal{L} erhält man eine Darstellung

$$\mathcal{L} = \text{Ker} \left(\bigoplus_{Z_j} \mathcal{L}|_{Z_j} \rightarrow \bigoplus_{Z_j^1} \mathcal{L}|_{Z_j^1} \right). \quad (3.3)$$

Weil ζ trivial ist, existiert ein Korand $\zeta_{\sigma_i^0} \in k^\times$ mit

$$\zeta_{\sigma_i^1} = \zeta_{\sigma_i^0} \cdot \zeta_{\sigma_j^0}^{-1}, \quad [\sigma_i^0 : \sigma_i^1] = 1, \quad [\sigma_j^0 : \sigma_i^1] = -1.$$

Man erhält eine Familie von Schnitten in $\Gamma(Z_j, \mathcal{L}|_{Z_j})$

$$s_{\sigma_j^0} := \varphi_{\sigma_j^0}(1) \cdot \zeta_{\sigma_j^0}.$$

Aus der Darstellung von \mathcal{L} in Gleichung (3.3) erhält man, dass die Schnitte $s_{\sigma_j^0}$ zu einem globalen Schnitt von \mathcal{L} verheften. Somit ist \mathcal{L} trivial.

Dass andererseits jeder Kozykel $\zeta \in H^1(\text{Pol}(\underline{X}), k^\times)$ eine invertierbare Garbe auf X induziert, sieht man auf ähnliche Weise. \square

Bemerkung 3.5.5. Man betrachtet den Fall, dass $\text{Pol}(\underline{X})$ ein Simplicial-Komplex ist. Hierzu äquivalent ist, dass X^{red} ein Normal-Crossing Schema ist.

Man betrachtet die *Hyperüberdeckung* $X^\bullet \rightarrow X^{\text{red}}$, die durch die Faserprodukte

$$X^{(n)} := X' \times_X \cdots \times_X X'$$

gegeben ist (Exposé *V^{bis}* in [47]). Es sei daran erinnert, dass die *simpliziale Picard-Gruppe* der Hyperüberdeckung $\text{Pic}(X^\bullet)$ aus Isomorphieklassen von Objekten (\mathcal{L}', α) besteht, wobei \mathcal{L}' eine invertierbare Garbe auf X' und α ein Abstiegsatum ist

$$\alpha : p_1^* \mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{L}',$$

d.h. ein Isomorphismus über $X^{(2)}$, der die Kozykelbedingungen auf $X^{(3)}$ erfüllt. Hierbei sind $p_i : X^{(n)} \rightarrow X'$, $1 \leq i \leq n$ die Projektionen (Abschnitt 3 in [37]). Man hat einen kanonischen Homomorphismus $\text{Pic}(X^{\text{red}}) \rightarrow \text{Pic}(X^\bullet)$. Mit Hilfe von (Theorem 3.2 in [37]) und Proposition 3.5.4 kann man zeigen, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist.

Proposition 3.5.6. *Man nimmt nun zusätzlich an, dass \underline{X} kombinatorisch regulär ist. Dann sind die Garben $\overline{\mathcal{M}}_X, \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}}$ welk.*

Beweis. Man sieht leicht, dass $\mathcal{M}_F^{\text{gp}}$ auf $F = F(\underline{X})$ eine welke Garbe ist.

Weiterhin ist für eine offene Menge U die Menge \tilde{U} , die definiert ist durch

$$\tilde{U} = \bigcup_{D \cap U \neq \emptyset} D,$$

offen in X , wobei D die Strata von X durchläuft. Man sieht, dass die kanonische Abbildung

$$\Gamma(\tilde{U}, \overline{\mathcal{M}}_{\tilde{U}}^{\text{gp}}) \rightarrow \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_U^{\text{gp}})$$

ein Isomorphismus ist, denn $\overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}}$ ist auf jedem Stratum konstant.

Nun ist \tilde{U} das Urbild einer offenen Menge in F unter der kanonischen Abbildung $X \rightarrow F$. Die Behauptung folgt daher aus der Welkheit von $\mathcal{M}_F^{\text{gp}}$. \square

Bemerkung 3.5.7. Verzichtet man auf die Log-Glattheit, so ist $\overline{\mathcal{M}}_X$ im Allgemeinen nicht welk. Man betrachte zum Beispiel die affine Kurve X zu dem Ring $\mathbb{C}[x, y]/(x \cdot y)$ mit der assoziierten Log-Struktur zu $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{O}_X$ mit $(1, 0) \mapsto 0$, $(0, 1) \mapsto x + y$. Dann sind die Schnitte von $\overline{\mathcal{M}}_X$ über dem affinen offenen Teil

$$U = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, 1/x]) \cup \text{Spec}(\mathbb{C}[y, 1/y])$$

isomorph zu \mathbb{N}^2 . Man sieht, dass kein Schnitt in $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_X)$ der Form (m, n) mit $m \neq n$ eine Ausdehnung zu einem globalen Schnitt hat.

Kapitel 4

Valuative Log-Räume

4.1 Bewertungstheorie der Monoide

4.1.1. Man benötigt eine Reihe elementarer Definitionen:

- Ein integrier Monoid M heißt, wenn aus $a \in M^{\text{gp}}$ folgt $a \in M$ oder $a^{-1} \in M$.
- Für einen scharfen valuativen Monoid M ist M^{gp} eine geordnete Gruppe vermöge

$$a > b \iff a \cdot b^{-1} \in M.$$

- Wie in (Theorem 3 in [42], §3, Kapitel VI) zeigt man, dass die Menge der Primideale eines valuativen Monoids vermöge Inklusion total geordnet ist.

- Der *Rang* eines valuativen Monoids M ist die Kardinalität von $\text{Spec}(M) - \emptyset$.

- Man hat das folgende Kriterium für Valuativität:

Ein Monoid ist genau dann valuativ, wenn alle endlich erzeugten Ideale Hauptideale sind.

- Ein valuativer Monoid ist saturiert.

Definition 4.1.2. *Ein Log-geringter oder allgemeiner monoidaler Raum (X, \mathcal{M}_X) heißt valuativ, wenn die Halme $\mathcal{M}_{X,x}$, $x \in X$ valuative Monoide sind.*

Die folgende Ausführungen sind Vorbereitungen für Katos valuative Log-Schemata.

Proposition 4.1.3. *Für jeden Fächer F existiert ein valuativer monoidaler Raum F^{val} zusammen mit einem Morphismus monoidaler Räume*

$$\varphi_F : F^{\text{val}} \rightarrow F,$$

der universell ist für Morphismen von valuativen monoidalen Räumen nach F .

Beweis. Es sei $F = \text{Spec}(M)$ affin. Man konstruiert F^{val} als projektiven Limes

$$F^{\text{val}} := \varprojlim_I F_I$$

in der Kategorie der monoidalen Räume über alle Fan-Aufblasungen an endlich erzeugten Idealen $I \subset M$. Die Ideale sind hierbei induktiv geordnet vermöge:

$$I \leq J \iff \exists K \subset M \text{ mit } K \cdot I = J.$$

Den projektiven Limes monoidaler Räume bildet man wie folgt:

Der unterliegende topologische Raum ist der projektive Limes der topologischen Räume. Die inversen Bilder \mathcal{M}_I der Garben \mathcal{M}_{F_I} unter den Projektionen $F^{\text{val}} \rightarrow F_I$ bilden ein induktives System von Garben von Monoiden auf F^{val} . Man definiert die Prägarbe

$$U \mapsto \varprojlim_I \mathcal{M}_I(U)$$

auf F^{val} . Deren assoziierte Garbe ist die Strukturgarbe $\mathcal{M}_{F^{\text{val}}}$.

Die Universalität von φ_F folgt aus dem Kriterium für Valuativität in 4.1.1. □

- Die topologischen Punkte von F^{val} nennt man auch *Bewertungen von F* .
- Für einen fs Monoid M ist der Raum $\text{Spec}(M)^{\text{val}}$ das monoidale Analogon der Zariski Riemannschen Fläche in der kommutativen Algebra (Kapitel VI in [42]).

Die Bewertungen von M (d.h. $\text{Spec}(M)$) entsprechen Homomorphismen

$$v : M^{\text{gp}} \rightarrow G,$$

wobei $(G, >)$ eine geordnete Gruppe ist und die Werte $v(m) \geq 0$ sind.

- Die Bewertungen eines fs Fächers F vom Rang ≤ 1 sind die Elemente in

$$F(\mathbb{R}_{\geq 0})/|\mathbb{R}^\times|.$$

Denn scharfe valutive Monoide vom Rang ≤ 1 sind Untermonoide von $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die folgende Proposition beschreibt die *Bewertungen eines Gitters*:

Proposition 4.1.4. *Es seien Λ ein Gitter und $v : \Lambda \rightarrow G$ ein Homomorphismus, wobei $(G, >)$ eine geordnete Gruppe ist. Dann existiert eine eindeutige Kette von Gittern*

$$\Lambda = \Lambda_0 \supset \cdots \supset \Lambda_r \text{ mit } r \leq \text{Rg}(\Lambda)$$

und Homomorphismen $v_i : \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}$, so dass genau dann $v(m) \geq 0$ ist, wenn gilt

$$v_j(m) > 0 \text{ mit } j = \min(i; v_i(m) \neq 0).$$

Beweis. Man betrachtet den valativen Monoid

$$P = \{m \in \Lambda; v(m) \geq 0\}.$$

Ohne Einschränkung sei $\bar{P} \neq 0$. Dann hat P ein eindeutiges Primideal \mathfrak{p} der Höhe 1 und

$$P/(P - \mathfrak{p})$$

ist ein scharfer valutiver Monoid vom Rang 1, d.h. ein Untermonoid von $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Man definiert daher v_0 als die kanonische Abbildung

$$v_0^{\text{gp}} : P^{\text{gp}} \rightarrow [P/(P - \mathfrak{p})]^{\text{gp}} \hookrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Behauptung folgt nun per Induktion. Hierfür setzt man $\Lambda_1 := \text{Ker}(v_0^{\text{gp}})$ und wendet obige Prozedur auf die Einschränkung $v|_{\Lambda_1}$ an. □

Korollar 4.1.5. Für einen fs Fächer ist jede nichttriviale Bewertung die Spezialisierung einer eindeutig bestimmten Bewertung vom Rang 1.

Korollar 4.1.6. Für einen fs Fächer ist $F(\mathbb{Q}_{\geq 0})/|\mathbb{Q}^\times|$ eine dichte Teilmenge in F^{val} .

Bemerkung 4.1.7. Für einen fs Fächer gilt $F(\mathbb{Q}_{> 0}) = F(\mathbb{N})$. Somit sind die Elemente in $F(\mathbb{Q}_{\geq 0})/|\mathbb{Q}^\times|$ diskrete oder triviale Bewertungen.

Beispiel 4.1.8. Die Bewertungen von \mathbb{N}^2 kann man in vier Klassen unterteilen:

1. Die triviale Bewertung $\mathbb{N}^2 \rightarrow 0$.
2. Diskrete Bewertungen $v : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.
3. Nichtdiskrete Rang 1 Bewertungen $v : \mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, wie zum Beispiel

$$v(0, 1) = \sqrt{2}, \quad v(1, 0) = \sqrt{3}.$$

4. Rang 2 Bewertungen $v : \mathbb{N}^2 \hookrightarrow P \subset \mathbb{Z}^2$, wie zum Beispiel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x \in \mathbb{N}^+, y \in \mathbb{Z}\} \cup (0 \oplus \mathbb{N}).$$

4.2 Katos valuative Log-Schemata

In diesem Abschnitt werden die *valuativen Log-Schemata* von K. Kato definiert und einige Eigenschaften erläutert. Man beachte, dass in der ursprünglichen Definition in [20] ein valuatives Log-Schema als *algebraischer valuativer Log-Raum* bezeichnet wird.

Das nächste Theorem ist grundlegend für die Theorie der valuativen Log-Schemata. Für die entsprechende kombinatorische Konstruktion siehe Proposition 4.1.3.

Theorem 4.2.1. *Es sei \underline{X} ein quasikohärentes Zariski Log-Schema.*

Dann existieren ein valuativer Log-lokal geringter Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ und eine Abbildung

$$\varphi_X : \underline{X}^{\text{val}} \rightarrow \underline{X},$$

der universell ist für Abbildungen valuativer Log geringten Räume nach \underline{X} .

Beweis. In (1.3 in [20]) findet man eine Beweisskizze hierfür. Der Vollständigkeithalber werden kurz die Konstruktion und die Argumente aus loc. cit. wiederholt:

Man nimmt an, dass die Log-Struktur eine Karte besitzt $\alpha : M \rightarrow \mathcal{M}_X$. Man definiert dann den log-geringten Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ als projektiven Limes

$$\underline{X}^{\text{val}} := \varprojlim_I \underline{X}_I. \tag{4.1}$$

Hierbei ist $I \subset M$ ein endlich erzeugtes Ideal und $\underline{X}_I \rightarrow \underline{X}$ ist definiert als die Log-Aufblasung an dem von $\alpha(I)$ erzeugten Ideal in \mathcal{M}_X .

Den projektiven Limes log-geringter Räume bildet man wie folgt:

Der unterliegende geringte Raum ist der projektive Limes der geringten Räume.

Die inversen Bilder der Log-Strukturen $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ unter den Projektionen $X^{\text{val}} \rightarrow X_{\mathcal{I}}$ bilden ein induktives System von Log-Strukturen auf X^{val} . Deren induktiven Limes konstruiert man zuerst als Prälog-Struktur und bildet dann die assoziierte Log-Struktur.

Die Universalität von φ_X folgt aus dem Kriterium in 4.1.1 und Proposition 2.5.1. \square

Definition 4.2.2. *In der Situation von Theorem 4.2.1 heißen:*

1. $\underline{X}^{\text{val}}$ das assoziierte valuative Log-Schema zu \underline{X} .
2. \underline{X} ein ganzes Modell von $\underline{X}^{\text{val}}$.

Bemerkung 4.2.3. Ist \mathcal{M}_X eine fs Log-Struktur ohne Selbstüberschneidung, so ist

$$\underline{X}^{\text{val}} = \varprojlim_{\mathcal{I}} \underline{X}_{\mathcal{I}},$$

wobei der projektive Limes über alle Log-Aufblasungen an kohärenten Idealen $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_X$ gebildet wird. Man beachte, dass jedes endlich erzeugte Bruchideal in einem Halm $\overline{\mathcal{M}}_{X,x}$ eine Audehnung hat zu einem kohärenten Bruchideal von \mathcal{M}_X .

Bemerkung 4.2.4. *Für ein fs Log-Schema \underline{X} kann man das assoziierte valuative Log-Schema $\underline{X}^{\text{val}}$ unabhängig davon konstruieren, ob die Log-Struktur Zariski ist oder nicht.*

Nach Reduktion auf ein quasikompaktes X folgt dies aus Proposition 2.5.13.

Bemerkung 4.2.5. Es seien \underline{X} ein quasikohärentes Log-Schema und $\underline{X}^{\text{sat}}$ seine Satura-tion. Die kanonische Abbildung $\underline{X}^{\text{sat}} \rightarrow \underline{X}$ stellt einen Isomorphismus her

$$(\underline{X}^{\text{sat}})^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \underline{X}^{\text{val}}.$$

Genauso stellt jede eigentliche Log-Modifikation $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ einen Isomorphismus her

$$\underline{Y}^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \underline{X}^{\text{val}}.$$

Es folgen einige Bemerkungen, die für das Verständnis von $\underline{X}^{\text{val}}$ hilfreich sind.

4.2.6. Die Kombinatorik eines fs Log-Schemas \underline{X} kann man mit dem assoziierten Fächer

$$F = F(\underline{X})$$

beschreiben. Die Kombinatorik von dem Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ kann man ganz analog mit Hilfe des assoziierten valuativen Fächers beschreiben

$$F^{\text{val}} = \varprojlim_{\mathcal{I}} F_{\mathcal{I}}$$

(siehe Proposition 4.1.3). Den Zusammenhang kann man wie folgt begründen:

Nach Theorem 2.5.4 ist die kanonische Abbildung monoidaler Räume

$$f_X : (X, \overline{\mathcal{M}}_X) \rightarrow F$$

mit Log/Fan-Aufblasungen veträglich. Durch Übergang zum projektiven Limes über alle Aufblasungen erhält man somit eine kanonische Abbildung monoidaler Räume

$$f_{X^{\text{val}}} : (\underline{X}^{\text{val}}, \overline{\mathcal{M}}_{X^{\text{val}}}) \rightarrow F^{\text{val}}.$$

Man kann zeigen, dass $f_{X^{\text{val}}}$ eine universelle Eigenschaft erfüllt.

4.2.7. Mengentheoretisch kann man den Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ beschreiben durch die \underline{X} -Bewertungen. Hierbei ist eine \underline{X} -Bewertung ein Morphismus von Log-Schemata

$$v : \text{Spec}(k) \rightarrow \underline{X},$$

wobei k ein Körper ist mit einer valuativen konstanten Log-Struktur. Die Punkte in $\underline{X}^{\text{val}}$ stehen in Bijektion zu den \underline{X} -Bewertungen modulo Äquivalenz. Hierbei heißen zwei Bewertungen von \underline{X} äquivalent, wenn sie auf offensichtliche Weise von einer dritten Bewertung dominiert werden. Die Bewertungen von \underline{X} kann man wie folgt konstruieren:

Es seien $x \in X$ und $M = \overline{\mathcal{M}}_{X,x}$. Weiterhin sei $v : M \rightarrow N$ eine Bewertung, d.h. v ist ein Homomorphismus und N ein valuativer Monoid. Man nimmt an, dass gilt

$$\text{Ker}(v^{\text{gp}} : M^{\text{gp}} \rightarrow N^{\text{gp}}) = 0,$$

ansonsten muß man zu einer geeigneten Log-Aufblasung von \underline{X} übergehen. Dann induziert v eine Bewertung von \underline{X} , die den gegebenen Punkt x dominiert.

Eine Log-Modifikation $\underline{U} \rightarrow \underline{X}$ induziert offensichtlich eine offene Immersion

$$\underline{U}^{\text{val}} \hookrightarrow \underline{X}^{\text{val}}$$

(siehe Definition 2.5.5). Genauer gilt, wie man leicht sieht, dass die Topologie auf dem Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ von den Log-Modifikationen von \underline{X} erzeugt wird.

Aus Korollar 4.1.6 erhält man weiterhin:

Proposition 4.2.8. *Für ein fs Log-Schema \underline{X} bilden die diskreten und trivialen Bewertungen, d.h. die Charakteristik ist \mathbb{N} oder trivial, eine dichte Teilmenge.*

Wichtig ist die folgende Proposition von K. Kato (Proposition 1.3.9 in [20]):

Proposition 4.2.9. *Für ein quasikohärentes Log-Schema \underline{X} gilt:*

1. \underline{X} ist quasikompakt $\iff \underline{X}^{\text{val}}$ ist quasikompakt.
2. Ist die Log-Struktur auf X zusätzlich saturiert, so gilt:
 \underline{X} ist zusammenhängend $\iff \underline{X}^{\text{val}}$ ist zusammenhängend.

Man erhält die folgenden Korollare:

Korollar 4.2.10. *Der Raum $\underline{X}^{\text{val}}$ ist lokal quasikompakt.*

Korollar 4.2.11. *Es sei \underline{X} ein quasikompaktes fs Log-Schema. Weiterhin sei \mathcal{F} eine der folgenden Garben auf dem topologischen Raum X^{val} :*

$$\mathcal{O}_{X^{\text{val}}}, \mathcal{O}_{X^{\text{val}}}^{\times}, \mathcal{M}_{X^{\text{val}}}^{\text{gp}}, \overline{\mathcal{M}}_{X^{\text{val}}}^{\text{gp}}$$

Entsprechend sei $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ für eine Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ eine der Garben

$$\mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}, \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}^{\times}, \mathcal{M}_{X_{\mathcal{I}}}^{\text{gp}}, \overline{\mathcal{M}}_{X_{\mathcal{I}}}^{\text{gp}}.$$

Dann gilt für die Kohomologiegruppen bzgl. der gewöhnlichen Topologien

$$H^i(X^{\text{val}}, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{I}} H^i(X_{\mathcal{I}}, \mathcal{F}_{X_{\mathcal{I}}}) \quad \text{für } i \geq 0.$$

Beweis. Dies folgt zusammen mit der Konstruktion von $\underline{X}^{\text{val}}$ als projektiven Limes aller Log-Aufblasungen von \underline{X} aus (Korollar 8.7.7 in [47], Exposé VI). \square

Wie in [20] kann man nun global valuative Log-Schemata definieren:

Definition 4.2.12. *Ein valuatives Log-Schema $\underline{\mathfrak{X}}$ ist ein valuativer Log geringter Raum, der lokal isomorph ist zu $\underline{U}^{\text{val}}$ mit einem quasikohärenten Log-Schema \underline{U} .*

Warnung. *Ein valuatives Log-Schema ist im Allgemeinen kein Log-Schema im Sinne von Fontaine-Illusie. Ein fs Log-Schema \underline{X} ist genau dann valuativ, wenn gilt*

$$\overline{\mathcal{M}}_{X,x} = \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad \overline{\mathcal{M}}_{X,x} = 0 \quad \forall x \in X.$$

Definition 4.2.13. *1. Ein valuatives Log-Schema heißt fs, wenn es lokal isomorph ist zu $\underline{U}^{\text{val}}$, wobei \underline{U} ein fs Log-Schema im Sinne von Lafontaine-Illusie ist.*

2. Ein Morphismus valuativer Log-Schemata $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}$ heißt quasisepariert, wenn die Diagonalabbildung $\Delta : \underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{X}} \times_{\underline{\mathfrak{G}}} \underline{\mathfrak{X}}$ quasikompakt ist.

3. Ein valuatives Log-Schema $\underline{\mathfrak{X}}$ heißt quasisepariert, wenn die eindeutige Abbildung in das finale Objekt $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ quasisepariert ist.

4.3 Die Kategorie der fs valuativen Log-Schemata

Das Hauptresultat in diesem Abschnitt ist Theorem 4.3.9. *Hiernach sind die Kategorien der fs valuativen Log-Schemata und der fs Log-Schemata lokalisiert an Log-Aufblasungen äquivalent.* Dies ist das Analogon zu einem berühmten Theorem von Raynaud in der rigid analytischen Geometrie, wonach die Kategorien der rigiden Räume und der formellen Schemata lokalisiert an formellen Aufblasungen äquivalent sind.

Konvention. - *Alle Schemata sind lokal noethersch.*

- *Alle (valuativen) Log-Schemata sind im Folgenden fs.*

Für das weitere Vorgehen benötigt man einige Definitionen aus [40]. Man sieht leicht, dass die folgenden Definitionen von *kombinatorischen \mathcal{O}_X -Moduln* und *t-Flachheit* mit denen in loc. cit. übereinstimmen. Weitere Details findet man in (1.6, 2.1, 2.2 in [40]).

Definition 4.3.1. *Es sei \underline{X} ein fs Log-Schema.*

1. Ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{K} heißt kombinatorisch, wenn es étale lokal quasikohärente \mathcal{M}_X -Untergarben $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{M}_X^{\text{gp}}$, $i = 1, 2$ gibt, so dass ein Isomorphismus existiert

$$\mathcal{K} \simeq (\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{O}_X) / (\mathcal{A}_2 \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{O}_X).$$

2. Ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} heißt t-flach, wenn für alle kombinatorischen \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{K} die folgenden höheren Torsionsgruppen verschwinden:

$$\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{K}, \mathcal{F}) = 0, \quad i > 0.$$

Bemerkung 4.3.2. Man sieht, dass ein \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} genau dann t-flach ist, wenn

$$\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

ein exakter Funktor auf der Kategorie der kombinatorischen \mathcal{O}_X -Moduln ist.

Proposition 4.3.3. *Es sei $\varphi : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ ein Log-Modifikation von fs Log-Schemata und \mathcal{F} ein t-flacher \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist das Pullback $\varphi^* \mathcal{F}$ ein t-flacher \mathcal{O}_Y -Modul.*

Beweis. Man reduziert die Behauptung auf den Fall, dass X das Spektrum des Ringes R ist, die Log-Struktur eine Karte $M \rightarrow \mathcal{M}_X$ mit $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$ hat und \underline{Y} das Spektrum von $R \otimes_M N$ ist mit N einem M -Untermonoid von M^{gp} und der induzierten Log-Struktur.

Es seien K ein kombinatorischer $R \otimes_M N$ -Modul und F der t-flache R -Modul, der \mathcal{F} induziert. Man wählt eine projektive Auflösung $0 \leftarrow F \leftarrow F_\bullet$. Weil F t-flach ist, liefert Tensorierung mit N eine projektive Auflösung von dem $R \otimes_M N$ -Modul $F \otimes_M N$

$$0 \leftarrow F \otimes_M N \leftarrow F_\bullet \otimes_M N.$$

Nun hat man aber eine kanonische Isomorphie

$$F_\bullet \otimes_R K \simeq (F_\bullet \otimes_M N) \otimes_{R \otimes_M N} K.$$

Die Kohomologiegruppen dieser Komplexe sind die höheren Torsionsgruppen von F bzw. $F \otimes_M N$. Aus (Proposition 1.5.4 in [40]) erhält man weiterhin, dass K eine direkte Summe kombinatorischer R -Moduln ist. Somit hat man wie gewünscht

$$\text{Tor}_i^{R \otimes_M N}(F \otimes_M N, K) = \text{H}^i(F_\bullet \otimes_R K) = 0 \quad \text{für } i > 0.$$

□

Wie in der klassischen algebraischen Geometrie definiert man:

Definition 4.3.4. *Es seien \underline{X} ein fs Log-Schema und $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$ eine Log-Aufblasung.*

1. *Der Ausnahme-Divisor der Log-Aufblasung $D(\mathcal{I}) \subset X_{\mathcal{I}}$ ist das Urbild unter $\varphi_{\mathcal{I}}$ des abgeschlossenen Unterschemas in X , das durch \mathcal{I} definiert ist.*
2. *Es seien weiterhin \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul und $\underline{\Gamma}_{D(\mathcal{I})}(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F})$ die Untergarbe von $\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F}$ aller Schnitte mit Support in $D(\mathcal{I})$.*

Die strikte Transformation von \mathcal{F} unter der Log-Aufblasung ist der $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}$ -Modul

$$(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F})^{st} := \varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F} / \underline{\Gamma}_{D(\mathcal{I})}(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F}).$$

Man benötigt das folgende Lemma:

Lemma 4.3.5. *Es seien S ein Schema, M ein Monoid mit $M^{\text{gp}} \simeq \mathbb{Z}^r$, $\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$ das zugehörige torische Log-Schema und \mathcal{F} ein t-flacher \mathcal{O}_X -Modul.*

Dann gilt für jede Log-Aufblasung $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$ an einem Bruchideal $I \subset M^{\text{gp}}$:

$$(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F})^{st} = \varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F}$$

Beweis. $\underline{X}_{\mathcal{I}}$ wird überdeckt von affinen torischen Log-Schemata $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[N])$ mit $M \subset N$ und $N^{\text{gp}} = M^{\text{gp}}$. Wegen der t-Flachheit erhält man eine Injektion

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S[M]} \mathcal{O}_S[N] \hookrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S[M]} \mathcal{O}_S[M^{\text{gp}}].$$

Hieraus erhält man unmittelbar die Behauptung. \square

Sehr wichtig ist das folgende *Flattening-Theorem von Thompson* (Korollar 3.3.5 in [40]).

Theorem 4.3.6. *Es seien \underline{X} ein quasikompaktes fs Log-Schema und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann existiert eine Log-Aufblasung $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$, so dass die strikte Transformation $(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F})^{\text{st}}$ ein t-flacher $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}$ -Modul ist (siehe Definitionen 4.3.4, 4.3.1).*

Mit dem Flattening-Theorem kann man die folgende wichtige Proposition beweisen:

Proposition 4.3.7. *Es seien \underline{X} ein quasikompaktes fs Log-Schema und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann existiert eine Log-Aufblasung $\underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$, so dass gilt:*

Bildet man eine weitere Verkettung von Log-Aufblasungen

$$\underline{Z} \xrightarrow{\varphi} \underline{Y} \longrightarrow \underline{X}_{\mathcal{I}},$$

und ist \mathcal{G} das Pullback von \mathcal{F} nach Y , so gilt für die höheren direkten Bilder

$$\varphi_* \varphi^* \mathcal{G} = \mathcal{G}, \quad R^n \varphi_* \varphi^* \mathcal{G} = 0 \quad \text{für } n \geq 1.$$

Bemerkung 4.3.8. Diese Proposition gilt allgemeiner für Kompositionen von Log-Modifikationen $\underline{Z} \xrightarrow{\varphi} \underline{Y} \rightarrow \underline{X}_{\mathcal{I}}$, wobei φ eine eigentliche Log-Modifikation ist.

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich lokaler Natur bzgl. X . Mit Hilfe einer Karte und via Pullback von \mathcal{F} reduziert man die Behauptung auf den torischen Fall

$$\underline{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[N]).$$

Man wählt eine Darstellung des kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} :

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Dann ist \mathcal{K} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Nach Theorem 4.3.6 existiert daher eine Log-Aufblasung $\varphi_{\mathcal{I}} : \underline{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X}$, so dass die strikte Transformation $(\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{K})^{\text{st}}$ t-flach ist.

Anwendung von $\varphi_{\mathcal{I}}^*$ auf die obige kurze exakte Sequenz liefert die exakte Sequenz

$$\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{K} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}^n \rightarrow \varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Der Kern der Abbildung f besteht aus den Schnitten von $\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{K}$ mit Support in dem Ausnahme-Divisor. Somit erhält man die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (\varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{K})^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}^n \rightarrow \varphi_{\mathcal{I}}^* \mathcal{F} \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Es seien $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}_{\mathcal{I}}$, $\varphi : \underline{Z} \rightarrow \underline{Y}$ Log-Aufblasungen. Es sei \mathcal{G} das Pullback von \mathcal{F} nach Y . Man muß zeigen, dass für die höheren direkten Bilder von $\varphi^* \mathcal{G}$ gilt

$$\varphi_* \varphi^* \mathcal{G} = \mathcal{G}, \quad R^n \varphi_* \varphi^* \mathcal{G} = 0 \quad \text{für } n \geq 1.$$

Der Einfachheit halber betrachtet man nur den Fall $\underline{Y} = \underline{X}_{\mathcal{I}}$. Den allgemeinen Fall kann man mit Proposition 4.3.3 hierauf reduzieren. Man schreibt $\mathcal{L} = (\varphi_Z^* \mathcal{K})^{\text{st}}$. Die Anwendung von φ^* auf die kurze exakte Sequenz (4.2) liefert die exakte Sequenz

$$\varphi^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_Y^n \rightarrow \varphi^* \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Nach Konstruktion ist \mathcal{L} t-flach und somit stimmt $\varphi^* \mathcal{L}$ nach Lemma 4.3.5 mit seiner strikt Transformierten überein. Folglich hat man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \varphi^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_Z^n \rightarrow \varphi^* \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Die Anwendung von φ_* auf diese kurze exakte Sequenz gibt die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varphi_* \varphi^* \mathcal{L} \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_Z^n \longrightarrow \varphi_* \varphi^* \mathcal{G} \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{R}^1 \varphi_* \varphi^* \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}^1 \varphi_* \mathcal{O}_Z^n \longrightarrow \mathrm{R}^1 \varphi_* \varphi^* \mathcal{G} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Man muß nun die höheren direkten Bilder analysieren. Zum einen gilt

$$\varphi_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y, \quad \mathrm{R}^n \varphi_* \mathcal{O}_Z = 0, \quad n > 0.$$

Falls die Basis ein Körper ist, folgt dies aus (Korollar 1 in [22], §3, Kapitel I). Den allgemeinen Fall kann man mit (Korollar 6.9.10 in [43]) hierauf reduzieren.

Die Berechnung der höheren direkten Bilder von $\varphi^* \mathcal{L}$ kann auf die von \mathcal{O}_Z zurückführen. Denn $\varphi^* \mathcal{L}$ ist nach Konstruktion als \mathcal{O}_Y -Modul t-flach. Somit gilt

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{L}) = 0, \quad i > 0.$$

Hierfür benutzt man, dass \underline{Z} eine Log-Modifikation von \underline{Y} ist. Daher degeneriert die *Hypertor-Spektralsequenz* in (Proposition 6.9.8 in [43]) und man erhält

$$\mathrm{R}^n \varphi_* \varphi^* \mathcal{L} = (\mathrm{R}^n \varphi_* \mathcal{O}_Z) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}.$$

□

Das nächste Theorem kann mit Fug und Recht als *Fundamentalsatz über fs valuative Log-Schemata* bezeichnet werden. Es hat viele Konsequenzen.

Theorem 4.3.9. *Die Kategorien der quasikompakten, quasiseparierten fs valuativen Log-Schemata und der quasikompakten, quasiseparierten fs Log-Schemata lokalisiert an Log-Aufblasungen kohärenter Log-Ideale sind äquivalent.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.3.7 und Korollar 4.2.11. □

Bemerkung 4.3.10. In [20] hat Kato ein schwächeres Theorem bewiesen, indem er lediglich Schemata betrachtet, die lokal von endlichem Typ über einer festen Basis sind (Theo 3.3.4 in [20]). Durch Proposition 4.3.7 wird diese Einschränkung überflüssig.

Beispiel 4.3.11. Man betrachtet das torische Log-Schema $\underline{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{N}^2])$. Es sei $\underline{\mathfrak{X}}^+$ der maximale offene Unterraum von $\underline{X}^{\text{val}}$, der über dem abgeschlossenen Stratum von X liegt. Die Verklebung zweier Kopien von $\underline{X}^{\text{val}}$ entlang $\underline{\mathfrak{X}}^+$ liefert dann ein fs valuatives Log-Schema, das nicht quasisepariert ist und kein ganzes Modell besitzt.

Man erhält die folgenden Korollare zu Theorem 4.3.9:

Korollar 4.3.12. *Es existieren alle Faserprodukte fs valuativer Log-Schemata.*

Beweis. Es seien $\underline{X}_i \rightarrow \underline{S}$, $i = 1, 2$ Morphismen von fs Log-Schemata. Dann ist wegen der Universalität des assoziierten valuativen Log-Schemas in Theorem 4.2.1

$$(\underline{X}_1 \times_{\underline{S}} \underline{X}_2)^{\text{val}}$$

das Faserprodukt der induzierten Abbildungen $\underline{X}_i^{\text{val}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$. Den allgemeinen Fall kann man mit Theorem 4.3.9 hierauf reduzieren. \square

Korollar 4.3.13. *Eigenschaften von Abbildungen von fs Log-Schemata, die unter Log-Aufblasungen stabil sind (wie eigentlich, projektiv), kann man auch für quasiseparierte, quasikompakte Abbildungen fs valuativer Log-Schemata definieren.*

Korollar 4.3.14. *Lokale Eigenschaften von Abbildungen von fs Log-Schemata, die unter Log-Aufblasungen stabil sind (wie lokal von endlichem Typ, log-glatt) kann man auch für Abbildungen fs valuativer Log-Schemata definieren.*

Die nächste Definition liefert einen Ersatz für die klassische fppf Topologie.

Definition 4.3.15. *Es sei $\underline{\mathcal{S}}$ ein fs valuatives Log-Schema.*

Der log-fqe Situs $\mathbf{Log-fqe}(\underline{\mathcal{S}})$ hat als Objekte die fs valuativen Log-Schemata $\underline{\mathcal{X}}$ über $\underline{\mathcal{S}}$ und die Morphismen sind die offensichtlichen. Die Topologie auf $\mathbf{Log-fqe}(\underline{\mathcal{S}})$ wird erzeugt von allen surjektiven log-fqe Familien $(\underline{\mathcal{X}}_i \rightarrow \underline{\mathcal{X}})$ über $\underline{\mathcal{S}}$.

Sehr wichtig ist das folgende Theorem von K. Kato (Theorem 4.1.2 in [20]). Es ist das log-fqe-Analogon von Katos Theorem 3.3.16, welches sich auf die Ku-fqe-Topologie bezieht.

Theorem 4.3.16. *Die Topologie auf $\mathbf{Log-fqe}(\underline{\mathcal{S}})$ ist gröber als die kanonische Topologie, d.h. für ein fs valuatives Log-Schema $\underline{\mathcal{X}}$ über $\underline{\mathcal{S}}$ hat man eine log-fqe Garbe:*

$$\text{Mor}_{\underline{\mathcal{S}}}(\cdot, \underline{\mathcal{X}})$$

Bemerkung 4.3.17. Es sei $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ eine Abbildung von fs Log-Schemata. Dann induziert eine epimorphe Ku-fqe Familie $(\underline{X}_i \rightarrow \underline{X})$ über \underline{S} eine log-fqe-Überdeckung

$$(\underline{X}_i^{\text{val}} \rightarrow \underline{X}^{\text{val}}).$$

Anders ausgedrückt hat man einen stetigen Morphismus von Siten

$$\mathbf{Log-fqe}(\underline{S}^{\text{val}}) \rightarrow \mathbf{Ku-fqe}(\underline{S}).$$

4.3.18. Es seien $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ ein Morphismus von fs Log-Schemata und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Man erhält dann den kohärenten $\mathcal{O}_{X^{\text{val}}}$ -Modul

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{\text{val}}} = \varprojlim_{\mathcal{I}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_{\mathcal{I}}}).$$

Betrachtet man speziell die Log-Differentiale $\Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ (Definition 3.1.1), so ist

$$\Omega_{\underline{X}/\underline{S}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{\text{val}}}$$

unabhängig von der Wahl des ganzen Modells \underline{X} . Denn Log-Aufblasungen sind log-étale und somit gilt nach Proposition 3.1.2 kanonisch

$$\Omega_{\underline{X}_T/\underline{S}_T} \simeq \Omega_{\underline{X}/\underline{S}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_T}.$$

Man kann daher ganz allgemein für eine Abbildung fs valuativer Log-Schemata $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{S}}$ den $\mathcal{O}_{\underline{\mathfrak{X}}}$ -Modul der Log-Differentiale $\Omega_{\underline{\mathfrak{X}}/\underline{\mathfrak{S}}}$ definieren.

Man kann zeigen, dass $\Omega_{\underline{\mathfrak{X}}/\underline{\mathfrak{S}}}$ analoge Aussagen wie $\Omega_{\underline{X}/\underline{S}}$ in Proposition 3.1.2 erfüllt.

Insbesondere ist $\Omega_{\underline{\mathfrak{X}}/\underline{\mathfrak{S}}}$ lokal frei, falls die Abbildung $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{S}}$ log-glatt ist.

Kapitel 5

Log-Gruppen

5.1 Allgemeine Fakten

Eine *Log-Gruppe* ist im wesentlichen eine Gruppe fs valuativer Log-Schemata. In diesem Abschnitt werden hauptsächlich grundlegende Definitionen vorgegeben.

Konvention. - *Im Folgenden sind alle Schemata lokal-noethersch.*

- *Die (valuativen) Log-Schemata sind in der Regel fs.*
- *Man wählt als Basis ein festes fs Log-Schema \underline{S} .*
- *Man betrachtet S als Log-Schema mit der trivialen Log-Struktur.*

5.1.1. Es folgt eine Wiederholung einiger wichtiger Notationen und Fakten.

- Einem fs Log-Schema ohne Selbstüberschneidung kann man folgende Daten zuordnen:
 1. das assoziierte valuative Log-Schema $\underline{X}^{\text{val}}$ und
 2. den assoziierten Fächer, Polyederkegelkomplex $F(\underline{X})$ bzw. $\text{Keg}(\underline{X})$.
- Allgemein werden valuative Log-Schemata \underline{X} mit Frakturbuchstaben notiert.
- Im Folgenden wird intensiv das fundamentale Theorem 4.3.9 benutzt.

Die nächste Definition ist der Dreh und Angelpunkt des ganzen Kapitels:

Definition 5.1.2. *Eine Log-Gruppe \underline{A} über $\underline{S}^{\text{val}}$ ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der fs valuativen Log-Schemata über $\underline{S}^{\text{val}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\underline{A} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ ist *quasisepariert*.
2. $\underline{A} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ ist *lokal von endlichem Typ*.

Beispiel 5.1.3. Es sei A ein quasisepariertes Gruppenschema lokal von endlichem Typ über S . Dann ist $A \times_S \underline{S}^{\text{val}}$ eine strikte Log-Gruppe über $\underline{S}^{\text{val}}$.

Es sei $\underline{\mathcal{A}}$ eine quasikompakte Log-Gruppe über $\underline{S}^{\text{val}}$, so dass $f : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ eine strikte Abbildung ist, d.h. es gilt für die induzierte Abbildung der Strukturgarben

$$f^* \mathcal{M}_{\underline{S}^{\text{val}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{A}}}.$$

Nimmt man weiterhin an, dass die Basis S quasikompakt ist, so folgt aus Theorem 4.3.9, dass nach Übergang zu einer Log-Aufblasung $\underline{S}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{S}$ eine strikte Abbildung von fs Log-Schemata $\underline{A} \rightarrow \underline{S}_{\mathcal{I}}$ existiert, welche folgende Eigenschaften hat:

1. A ist ein klassisches Gruppenschema über $S_{\mathcal{I}}$.
2. $\underline{\mathcal{A}}$ ist als Log-Gruppe über $\underline{S}^{\text{val}}$ isomorph zu $A \times_S \underline{S}^{\text{val}}$.

Allgemeiner kann man mit Theorem 4.3.9 zeigen:

Proposition 5.1.4. *Es sei \underline{S} ein quasikompaktes, quasisepariertes fs Log-Schema.*

Dann sind die Kategorien der quasikompakten quasiseparierten strikten fs valuativen Log-Schemata über $\underline{S}^{\text{val}}$ und der quasikompakten quasiseparierten strikten fs Log-Schemata über einer Log-Aufblasung $\underline{S}_{\mathcal{I}}$ lokalisiert an Log-Aufblasungen der Basis (\dagger) äquivalent. Hierbei bedeutet (\dagger) , dass die Abbildungen von Log-Schemata

$$\underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{S}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{X},$$

die induziert sind durch eine Log-Aufblasung invertierbar werden.

Man erhält das folgende Korollar:

Korollar 5.1.5. *Man kann Eigenschaften quasikompakter klassischer Gruppenschemata, die invariant sind unter Basiswechseln (zum Beispiel nur von den geometrischen Fasern abhängen) auch für quasikompakte strikte Log-Gruppen definieren.*

Es seien R ein diskreter Bewertungsring und A ein abelsches Schema über $\text{Quot}(R)$. Das Neron-Modell $N(A)$ ist ein Gruppenschema über R , dessen spezielle Faser im allgemeinen nicht zusammenhängend ist. Die nächste Proposition ist in gewisser Weise das Analogon zu der Konstruktion der Nullkomponente von $N(A)$.

Proposition 5.1.6. *Es sei $\underline{\mathcal{A}}$ ein quasikompakte log-glatte Log-Gruppe über $\underline{S}^{\text{val}}$. Dann existiert eine eindeutige offene Log-Untergruppe $\underline{\mathcal{G}} \subset \underline{\mathcal{A}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\underline{\mathcal{G}}$ ist strikt und quasikompakt über $\underline{S}^{\text{val}}$.
2. Die geometrischen Fasern von $\underline{\mathcal{G}}$ über $\underline{S}^{\text{val}}$ sind zusammenhängend.

Hierbei ist 2.) im Sinne von Korollar 5.1.5 zu verstehen.

Definition 5.1.7. *Im Folgenden heißt $\underline{\mathcal{G}}$ der strikte Anteil von $\underline{\mathcal{A}}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei S und damit auch $\underline{\mathcal{A}}$ quasikompakt und quasisepariert, so dass $\underline{\mathcal{A}}/\underline{S}^{\text{val}}$ ein fs ganzes Modell \underline{A}/S besitzt. Dann ist der Nullschnitt von $\underline{\mathcal{A}}$ nach geeigneten Log-Aufblasungen induziert durch einen strikten Schnitt

$$0 : \underline{S} \rightarrow \underline{A}.$$

Zunächst konstruiert man hierfür einen Schnitt $\tilde{0}$, der nicht notwendig strikt ist. Dann sieht man, dass die induzierte Abbildung der assoziierten Fächer

$$F(\tilde{0}) : F(\underline{S}) \rightarrow F(\underline{A})$$

eine Fan-Modifikation ist. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass diese Fan-Modifikation eine Ausdehnung zu einer Fan-Aufblasung hat. Die Behauptung folgt dann, weil die Abbildung $\tilde{0}$ eine eindeutige Faktorisierung hat

$$\tilde{0} : \underline{S} \xrightarrow{0} \underline{A} \times_{F(\underline{A})} F(\underline{S}) \rightarrow \underline{A},$$

wobei 0 nach Konstruktion ein strikter Schnitt ist.

Man sieht weiterhin, dass Striktheit eine offene Bedingung auf ist. Es sei $\underline{A}^{\text{st}}$ der maximale strikte offene Unterraum von \underline{A} über \underline{S} . Nun sind für eine strikte Abbildung Log-Glattheit und klassische Glattheit äquivalente Eigenschaften. Insbesondere ist $\underline{A}^{\text{st}} \rightarrow S$ klassisch glatt. Aus (Korollar 15.6.5 in [44]) folgt, dass ein maximales offenes Unterschema $G \subset \underline{A}^{\text{st}}$ existiert, das den Schnitt 0 enthält und faserweise zusammenhängend ist.

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass der induzierte offene Unterraum von $\underline{\mathcal{A}}$

$$\underline{\mathcal{G}} := (G \times_S \underline{S})^{\text{val}}$$

invariant unter der Multiplikation und Inversion ist. Somit ist $\underline{\mathcal{G}}$ eine strikte offene Log-Untergruppe von $\underline{\mathcal{A}}$ und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 5.1.8. Ist das Log-Schema \underline{S} valuativ ($\iff \overline{\mathcal{M}}_{X,x} = 0$ oder $\overline{\mathcal{M}}_{X,x} = \mathbb{N}$), so ist der strikte Anteil $\underline{\mathcal{G}} \hookrightarrow \underline{\mathcal{A}}$ ein gewöhnliches Gruppenschema G über S .

Ganz analog wie (Korollar 3 in [5], Kapitel 4) zeigt man die folgende Proposition.

Proposition 5.1.9. *Es sei $\underline{\mathcal{A}}$ eine Log-Gruppe über \underline{S} und $0_{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{S}^{\text{val}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ der Nullschnitt.*

Dann wird $\Omega_{\underline{\mathcal{A}}/\underline{S}^{\text{val}}}$ erzeugt von den invarianten Log-Differentialformen

$$\omega_{\underline{\mathcal{A}}} := 0_{\underline{\mathcal{A}}}^* \Omega_{\underline{\mathcal{A}}/\underline{S}^{\text{val}}},$$

d.h. man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\Omega_{\underline{\mathcal{A}}/\underline{S}^{\text{val}}} \xrightarrow{\sim} \omega_{\underline{\mathcal{A}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\underline{S}^{\text{val}}}} \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{A}}}.$$

5.2 Algebraische Log-Tori

Es seien T ein Torus und $T \hookrightarrow P$ projektive torische Varietät über einem Körper k . Dann trägt P eine kanonische Log-Struktur. Die Gruppenstruktur auf T hat eine eindeutige Fortsetzung auf $\underline{P}^{\text{val}}$. Man bezeichnet daher $\underline{P}^{\text{val}}$ als einen *Log-Torus*.

Die Log-Tori werden die Grundbausteine für die Konstruktion weiterer *Log-Gruppen* sein. Im Gegensatz zu den klassischen sind die logarithmischen Tori stets isotrivial.

Man betrachtet zunächst den *logarithmischen Einheitenfunktork*:

$$\mathcal{M}^{\text{gp}} : \underline{\mathfrak{X}} \longmapsto \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}^{\text{gp}})$$

von der Kategorie der valuativen Log lokal geringten Räume in die abelschen Gruppen. Der Funktor \mathcal{M}^{gp} besitzt den offenen Unterfunktork $\mathcal{M}^{\times} = \mathcal{O}^{\times}$, der darstellbar ist durch das Schema $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}}$. Man beachte, dass $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ das terminale Objekt ist.

Die folgende Proposition ist das analoge Resultat in der logarithmischen Geometrie. Die Aussage findet man auch in (Proposition 2.1.2 in [20]), jedoch ohne Beweis.

Proposition 5.2.1. *Der Funktor \mathcal{M}^{gp} ist darstellbar durch das valuative Log-Schema $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, wobei man Schnitte $0, 1, \infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z})$ fixiert hat und die Log-Struktur definiert ist durch*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1} := \mathcal{M}(\log D) \quad \text{mit dem Divisor } D = 0 + \infty.$$

Beweis. Die Garbe $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}^{\text{gp}}$ besitzt den kanonischen globalen Schnitt $s_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$. Es seien \underline{X} ein valuativer Log-geringter Raum und s ein globaler Schnitt in $\Gamma(X, \mathcal{M}_{\underline{X}}^{\text{gp}})$. Man muß eine Abbildung Log geringter Räume angeben $\varphi : \underline{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ mit $s_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1} \mapsto s$.

Den topologischen Teil der Abbildung definiert man wie folgt: Die Punkte $x \in X$ mit $s_x \in \mathcal{M}_{X, x}^{\times}$ bilden eine offene Teilmenge U^{\times} . Weil der Funktor \mathcal{O}^{\times} durch das Schema $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}}$ darstellbar ist, erhält man eine kanonische Abbildung

$$\varphi|_{U^{\times}} : U^{\times} \rightarrow \mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}}.$$

Die abgeschlossenen Teilmengen U^0 (bzw. U^{∞}) aller Punkte $x \in X$ mit

$$s_x \in \mathcal{M}_{X, x}^+ \quad (\text{bzw. } s_x^{-1} \in \mathcal{M}_{X, x}^+)$$

wird auf den $k(x)$ -wertigen Punkt $0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ (bzw. $\infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$) abgebildet. Hierfür benutzt man wesentlich, dass die Halme $\mathcal{M}_{X, x}$ valuative Monoide sind.

Die Abbildung der Strukturgarben sowie die Eindeutigkeit von φ sind evident. \square

5.2.2. Man benötigt weiterhin einige Fakten über Toruseinbettungen. Eine gute Quelle hierfür ist (Kapitel I in [22]), zumindest für Toruseinbettungen über Körpern. Für diskrete Bewertungsringe weicht die Definition in loc. cit. von der in dieser Arbeit ab.

Eine Toruseinbettung über dem Schema S besteht aus einem flachen Schema P , welches von endlichem Typ über S ist, einem S -Torus T , einer Operation von T auf P und einer T -equivarianten offenen Immersion $T \hookrightarrow P$ über S . Man fordert weiterhin (im Gegensatz zu [22]), dass für die Fasern über einem Punkt $s \in S$ gilt: T_s ist ein dichter Teil in P_s .

Es besteht der folgende enge Zusammenhang zwischen affinen Toruseinbettungen und Monoiden. Hierfür sei T zerfallend mit Charaktergruppe $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^r$. Ist dann M ein fs Untermonoid von Λ , der $M^{\text{gp}} = \Lambda$ erfüllt, so erhält man die Toruseinbettung

$$T = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[\Lambda]) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_S[M]).$$

Für die Konstruktion nichtaffiner Toruseinbettungen betrachtet man den \mathbb{R} -Vektorraum

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} := \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{R}).$$

Es sei (σ_i) eine Familie rationaler Polyederkegel in $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$, die einen Polyederkegelkomplex bilden. Eine solche Familie heißt *rationale Unterteilung von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$* . Sind dann

$$M_i = \text{Hom}(\sigma_i, \mathbb{R}_{\geq 0}) \cap \Lambda$$

die zugehörigen dualen Monoide, so verkleben die affinen Toruseinbettungen

$$T \hookrightarrow P_i = \text{Spec}(R[M_i])$$

zu einer Toruseinbettung $T \hookrightarrow P$. Ferner ist P über S genau dann eigentlich, wenn der Vektorraum $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ von den Polyederkegeln σ_i überdeckt wird.

Definition 5.2.3. *Eine S -Toruseinbettung $T \hookrightarrow P$ heißt torisch oder auch ein torisches Schema, wenn sie étale lokal bzgl. S von der obigen Form ist.*

5.2.4. Der Zusammenhang zwischen torischen und Log-Schemata ist evident:

- Ein torisches Schema $T \hookrightarrow P$ trägt eine kanonische fs-Log-Struktur \mathcal{M}_P . In dem affinen Fall $P = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$ ist diese assoziiert zu der kanonischen Prälog-Struktur

$$M \hookrightarrow \mathcal{O}_S[M]$$

- Ist S zusammenhängend, so stimmt der assoziierte Polyederkegelkomplex $\text{Keg}(\underline{X})$ auf kanonische Weise mit der rationalen Unterteilung (σ_i) von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ in 5.2.2 überein.

Weil diese Aussage eine gewisse Bedeutung hat, folgt nun ihr Beweis:

Beweis. Die Charaktere $\lambda \in \Lambda$ definieren kanonische globale Schnitte in $\Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}})$.

Nun folgt aus den Eigenschaften des assoziierten Fächers $F = F(\underline{P})$ in Theorem 2.3.2

$$\Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}) = \Gamma(F, \mathcal{M}_F^{\text{gp}}).$$

Wegen $\text{Keg}(\underline{X}) = F(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} = \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{R})$ erhält man durch Auswertung der $\lambda \in \Lambda$ als Schnitte in $\Gamma(F, \mathcal{M}_F^{\text{gp}})$ eine kanonische Abbildung

$$\text{Keg}(\underline{X}) \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}.$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, dass diese Abbildung injektiv ist und dass hierdurch $\text{Keg}(\underline{X})$ mit der rationalen Unterteilung (σ_i) in 5.2.2 übereinstimmt. \square

- Die Schnitte $f \in \Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}})$ kann man kanonisch identifizieren mit:

1. Schnitten $f \in \Gamma(F, \mathcal{M}_F^{\text{gp}})$, $F = F(\underline{X})$.
2. stückweise linearen Funktionen $f : \text{Keg}(\underline{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ (1.3.4).

- Man hat einen kanonischen injektiven Homomorphismus

$$\Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}) / \Lambda \hookrightarrow H^1(P, \mathcal{O}_P^{\times}) = \text{Pic}(P),$$

den man durch Auswertung der kanonischen kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_P^\times \rightarrow \mathcal{M}_P^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}} \rightarrow 1$$

mit dem globale Schnitte Funktor $\Gamma(P, \cdot)$ erhält.

- Ein Schnitt $f \in \Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}})$ induziert genau dann eine ample invertierbare Garbe auf P , wenn die zugehörige stückweise lineare Funktion $f : \text{Keg}(\underline{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ *streng konvex* ist. Dies bedeutet, dass für jede Zelle $\sigma \subset \text{Keg}(\underline{P})$ ein Charakter $\lambda \in \Lambda$ existiert mit

$$\lambda > f \text{ auf } \text{Keg}(\underline{P}) - \sigma \text{ und } \lambda = f \text{ auf } \sigma.$$

Eine solche Funktion $f : \text{Pol}(\underline{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polarisierungsfunktion von $\text{Pol}(\underline{V})$.

Bemerkung 5.2.5. *Wichtig für das Folgende ist, dass ein isotrivialer Torus T eine projektive torische Kompaktifizierung $T \hookrightarrow P$ besitzt. Dies sieht man wie folgt:*

Beweis. Ohne Einschränkung sei das Schema S zusammenhängend. Es seien Λ die Charaktergruppe und \bar{s} ein geometrischer Punkt und $\Lambda_{\bar{s}}$ die geometrische Faser. Dann operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ auf dem Vektorraum

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} = \text{Hom}(\Lambda_{\bar{s}}, \mathbb{R}).$$

Weil T isotrivial ist, faktorisiert diese Operation über einen endlichen Quotienten. Man konstruiert daher leicht eine $\pi_1(S, \bar{s})$ -equivariante Polyederkegelzerlegung Σ von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ mit einer equivarianten Polarisierungsfunktion $f : \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe 5.2.4). Es sei $S' \rightarrow S$ eine étale Überlagerung, über welcher der Torus $T' = T \times_S S'$ zerfällt. Dann induzieren Σ, f eine projektive torische Kompaktifizierung $T' \rightarrow P'$ zusammen mit einer amplen invertierbaren Garbe \mathcal{L}' hierauf, die kanonische Abstiegsdaten tragen. Durch amplen étalen Abstieg (Theorem 7 in [5], Kapitel 6) erhält man die Behauptung. \square

Bemerkung 5.2.6. *In dem Fall, dass die Basis S das Spektrum eines Körpers oder eines diskreten Bewertungsrings (R, π) ist, ist jede Toruseinbettung $T \hookrightarrow P$ torisch.*

Für einen Körper ist diese Aussage vollständig in [22] bewiesen. Für einen diskreten Bewertungsring fehlt der Beweis. Weiterhin weicht die Definition einer Toruseinbettung in dieser Arbeit von [22] ab. Daher wird dieser Fall nun bewiesen:

Beweis. Der entscheidene Punkt des Beweises ist *Sumihiros Theorem* (Theorem 5 in [22], §1). Hiernach hat jeder Punkt in P eine affine offene Umgebung $\text{Spec}(A)$, die T -invariant ist. Der Beweis von loc. cit. ist zwar nur für einen Körper als Basis angegeben, für einen diskreten Bewertungsring beweist man das Theorem aber ganz analog.

Es seien K der Quotientenkörper von A und Λ die Charaktergruppe von T . Ohne Einschränkung zerfalle der Torus. Dann kann man die R -Algebra A in die Eigenräume unter der T -Operation zerlegen und erhält eine Darstellung

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}.$$

Weil (R, π) ein diskreter Bewertungsring ist, hat man die beiden nichttrivialen Fälle

- 1.) $A_\lambda = K \cdot \lambda$
- 2.) $A_\lambda = R \cdot \pi^I \cdot \lambda$ für ein $I \in \mathbb{Z}$.

Die Monome $\lambda \cdot \pi^i$, die in A enthalten sind, bilden einen fs Untermonoid

$$M \subset \Lambda \oplus \mathbb{Z},$$

der $\{0\} \oplus \mathbb{N}$ enthält und $M^{\text{gp}} = \Lambda \oplus \mathbb{Z}$ erfüllt. Die ganze Zahl I in der Gleichung in 2.) $A_\lambda = R \cdot \pi^I \cdot \lambda$ ist das Minimum aller $i \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot \pi^i \in A$.

Man zeigt nun, dass ein fs Untermonoid $N \subset \Lambda$ existiert mit

$$M \simeq N \oplus \mathbb{N}.$$

Denn in dieser Situation ist $A = R[N]$ und die Behauptung folgt.

In dem Fall $K \subset A$ (\Leftrightarrow die spezielle Faser ist leer) ist dies trivial.

Ansonsten ist die Reduktion modulo π eine Toruseinbettung $T_0 \hookrightarrow \text{Spec}(A_0)$. Dann kann oben nur der zweite Fall auftreten. Für den fs Monoid $N = M \cap \Lambda$ gilt ferner $N^{\text{gp}} = \Lambda$. Schreibt man dann $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ mit $\lambda_i \in N$ und ist $A_\lambda = R \cdot m$, so erhält man

$$m \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \pi^k \equiv 0 \pmod{\pi^k}.$$

Es ist $A_0 = A/(\pi)$ ein Integritätsbereich. Denn A ist normal und flach über S und somit hat A_0 keine eingebetteten Primideale und weiterhin ist T_0 ein dichter offener Teil von $\text{Spec}(A_0)$. Nun sind aber $m, \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ und somit ist $k = 0$ und $m \in N$. \square

Die folgende Proposition liefert weitere nichttriviale Beispiele für Log-Gruppen:

Proposition 5.2.7. *Es sei T ein isotrivaler S -Torus mit Charaktergruppe Λ .*

1. *Auf der Kategorie der fs valuativen Log-Schemata über S ist der Funktor*

$$\text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}})$$

darstellbar durch eine projektive, log-glatte Log-Gruppe $\underline{P}^{\text{val}}$ über S .

2. *Für einen étalen T -Torsor H existiert das Amalgam $\underline{P}^{\text{val}} \amalg_T H$.*
3. *Ist weiterhin $1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$ eine Erweiterung des abelschen S -Schemas B , so existiert das Pushout in der Kategorie der Log-Gruppen $G \oplus_T \underline{P}^{\text{val}}$.*

Die folgende Definition drängt sich nun förmlich auf:

Definition 5.2.8. *Es heißt $\underline{P}^{\text{val}}$ bzw. $\text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}})$ ein Log-Torus über S .*

Beweis. Zu 1.) Man wählt eine projektive torische Kompaktifizierung $T \hookrightarrow P$. Eine solche existiert nach Bemerkung 5.2.5, weil der Torus T isotrivial ist. Man versieht P mit der kanonischen fs Log-Struktur. Dann stellt $\underline{P}^{\text{val}}$ den gewünschten Funktor dar:

Für einen zerfallenden Torus T erhält man dies aus Proposition 5.2.1. Für einen nichtzerfallenden Torus folgt dies via étalen Abstieg aus Katos Theorem 4.3.16. Denn hiernach ist $\underline{P}^{\text{val}}$ eine Garbe bzgl. der log-fqe Topologie.

Die weiteren Eigenschaften von $\underline{P}^{\text{val}}$ sind evident.

Zu 2.) Wie in 1.) reduziert man die Behauptung auf den Fall, dass der Torus zerfällt. Man beachte, dass die invertierbare Garbe \mathcal{L}' in dem Beweis von Bemerkung 5.2.5 sowohl unter der Galoisoperation als auch unter der T -Operation equivariant ist.

In diesem Fall ist die Konstruktion von $\underline{P}^{\text{val}} \amalg_T H$ aber trivial.

Die letzte Aussage erhält man aus der zweiten. \square

5.2.9. Zum Schluß dieses Abschnitts werden noch *vertikale Log-Gruppen* behandelt.

Man zeigt hierfür zunächst, dass Vertikalität eine offene Bedingung ist:

Es sei $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$ eine Abbildung von fs Log-Schemata. Weiterhin seien $v \in \underline{X}^{\text{val}}$, $u \in \underline{S}^{\text{val}}$ mit $v \mapsto u$ gegeben, so dass der Homomorphismus der Halme vertikal ist:

$$P = \mathcal{M}_{\underline{S}^{\text{val}},u} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\underline{X}^{\text{val}},v} = Q$$

Man zeigt, dass eine Log-Modifikation $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ existiert, die vertikal über \underline{S} ist und so dass gilt $v \in \underline{Y}^{\text{val}} \subset \underline{X}^{\text{val}}$. Wie folgt konstruiert man diese Log-Modifikation:

Es seien $x \in X$, $s \in S$ die unterliegenden Punkte von v bzw. u und M , N die Halme $\mathcal{M}_{X,x}$ bzw. $\mathcal{M}_{S,s}$. Es sei $\varphi : N \hookrightarrow M$ die induzierte Abbildung.

Dann induziert v eine Bewertung $v : M \rightarrow Q$. Ohne Einschränkung sei die Bewertung v nichttrivial, ansonsten hat man den trivialen Fall $M = N = 0$.

Nach Korollar 4.1.5 ist v die Spezialisierung einer diskreten Bewertung

$$w : M \rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Durch Komposition erhält man einen Homomorphismus von Monoiden

$$N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{w} \mathbb{R}_{\geq 0},$$

der wegen der Vertikalität von $P \hookrightarrow Q$ ebenfalls vertikal (\Leftrightarrow nichttrivial) ist.

Man muß nun einen rationalen Polyederkegel konstruieren

$$\Sigma \subset \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0}),$$

der die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es enthält Σ eine offene Umgebung von ν .
2. Es ist Σ vertikal über $\text{Hom}(N, \mathbb{R}_{\geq 0})$, d.h. man hat eine Abbildung

$$\Sigma^+ \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{\geq 0})^+.$$

Die induzierte Log-Modifikation $\underline{X} \times_{\text{Keg}(\underline{X})} \Sigma$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. Man beachte, dass $\text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$ eine abgeschlossene Zelle in $\text{Keg}(\underline{X})$ ist.

Weil Vertikalität eine offene Bedingung ist, erhält man:

Proposition 5.2.10. *Die Inklusion der vertikalen valuativen Log-Schemata in die Log-Schemata, jeweils über der Basis \underline{S} , hat einen rechtsadjungierten Funktor*

$$\underline{\mathcal{X}} \longmapsto \underline{\mathcal{X}}^{\text{vt}}.$$

Hierbei ist $\underline{\mathcal{X}}^{\text{vt}}$ der größte über $\underline{S}^{\text{val}}$ vertikale offene Unterraum von $\underline{\mathcal{X}}$.

Hieraus erhält man das folgende Korollar:

Korollar 5.2.11. *Es seien $T \hookrightarrow P$ ein projektives torisches Schema über S und Λ die Charaktergruppe von T . Dann stellt der vertikale Teil $(\underline{P}^{\text{val}})^{\text{vt}} \subset \underline{P}^{\text{val}}$ den Funktor*

$$\text{Hom}_{\underline{S}}(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}})$$

auf der vollen Unterkategorie der vertikalen valuativen Log-Schemata über \underline{S} dar.

Bemerkung 5.2.12. Es sei \underline{S} ein Log-Schema mit konstanter Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_S = \pi^{\mathbb{N}}$. Die kategorischen Punkte $(\mathbb{P}_{\underline{S}}^1)^{\text{vt}}(\underline{\mathcal{X}})$ entsprechen Schnitten $f \in \Gamma(\underline{\mathcal{X}}, \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{X}}}^{\text{gp}})$ mit

$$f|\pi^k \text{ und } \pi^l|f \text{ für geeignete } k, l \in \mathbb{N}.$$

Dies liefert eine andere Möglichkeit die vertikalen Einheiten $(\mathbb{P}_{\underline{S}}^1)^{\text{vt}}$ zu definieren. In (Proposition 7.2.2 in [36]) und (Proposition 2.2.1 in [20]) findet man diese Definition.

Bemerkung 5.2.13. Es sei \underline{S} ein Log-Schema mit konstanter Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_S = \pi^{\mathbb{N}}$. Weiterhin seien $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^r$ ein Gitter und $\underline{P}^{\text{val}}$ der zerfallende Log-Torus über S

$$\text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}}).$$

- Ist S zusammenhängend, so entsprechen die ganzen Modelle \underline{V} des vertikalen Teils

$$\underline{\mathfrak{V}} = (\underline{P}^{\text{val}} \times_S \underline{S})^{\text{vt}}$$

den rationalen Polyederzerlegungen des Vektorraums $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} = \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{R})$.

- Weiterhin kann man den assoziierten Polyederkomplex $\text{Pol}(\underline{V})$ auf kanonische Weise mit der entsprechenden Polyederzerlegung von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ identifizieren.

Dies ist eine Variante der Ausführungen in 5.2.2, 5.2.4. Über einen diskreten Bewertungsring (R, π) findet man eine Darstellung dieser Konstruktion in (§3 in [22], Kapitel IV). Im allgemeinen Fall geht die Konstruktion ganz analog:

Man kann annehmen, dass die Log-Struktur eine Karte $\pi^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{M}_S$ besitzt. Man faßt Elemente aus dem Gitter $\mathbb{Z} \oplus \Lambda$ auf als ganze lineare Funktionen auf dem Raum

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}.$$

Ein rationaler Polyeder $\sigma \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ bestimmt dann einen fs Monoid

$$M_{\sigma} = \{m \in \mathbb{Z} \oplus \Lambda; m|_{\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \sigma} \geq 0\}.$$

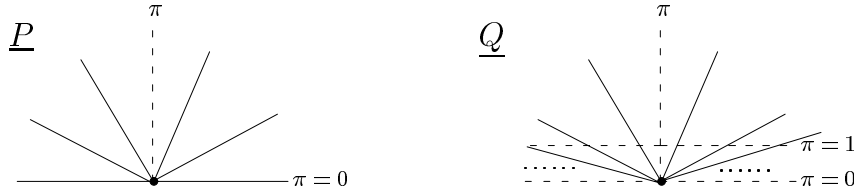
Man erhält dann \underline{V} durch Verklebung der Log-Schemata

$$\text{Spec}_S(\mathcal{O}_S \otimes_{\pi^{\mathbb{N}}} M_{\sigma}).$$

Dass man $\text{Pol}(\underline{V})$ mit der Polyederzerlegung von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ identifizieren kann, sieht man wie in 5.2.4, indem man $\pi^{\mathbb{Z}} \oplus \Lambda$ als Schnitte in $\Gamma(F, \mathcal{M}_F^{\text{gp}})$ und $F = F(\underline{V})$ interpretiert.

- Nach Bemerkung 3.4.6 gilt weiterhin, dass \underline{V} genau dann saturiert ist über \underline{k} , wenn die nulldimensionalen Zellen von $\text{Pol}(\underline{V})$ in dem Gitter $\Lambda^{\vee} \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ enthalten sind.

Die folgenden Abbildungen skizzieren $\text{Pol}(\underline{P})$, $\text{Pol}(\underline{V})$ in dem Fall $\Lambda = \mathbb{Z}$, $P = \mathbb{P}_S^1$.



Beispiel 5.2.14. Man betrachtet einen diskreten Bewertungsring R mit $K = \text{Quot}(R)$ und die multiplikative Gruppe $T = \mathbb{G}_{m,K}$. Diese besitzt ein Neron-Modell $N(T)$ über R . Es existiert dann eine equivariante, toroidale Kompaktifizierung

$$N(T) \hookrightarrow V,$$

d.h. für jede Erweiterung $R \hookrightarrow R'$ ist die Abbildung $V(R') \rightarrow V(K')$ surjektiv.

Dann ist $\underline{V}^{\text{val}}$ der vertikale Teil $(\mathbb{P}_R^1)^{\text{vt}}$, wobei \mathbb{P}_R^1 die Standard Log-Struktur trägt.

Für die explizite Konstruktion von V wählt man in Bemerkung 5.2.13 die kanonische Polyederzerlegung von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} = \mathbb{R}$ durch die Intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Log-semiabelsche Schemata

In diesem Abschnitt werden endlich *log-semiabelsche und log-abelsche Schemata* definiert. Über einer Basis mit trivialer Log-Struktur erhält man im abelschen Fall die ursprüngliche Definition. Im semiabelschen Fall besteht zumindest ein enger Zusammenhang.

Das Hauptergebnis in diesem Abschnitt ist das fundamentale Theorem 5.3.9. *Hiernach ist der strikte Anteil eines log-semiabelschen Schemas klassisch semiabelsch.*

Als ein wichtiges Korollar erhält man, dass log-semiabelsche Schemata kommutativ sind.

Zunächst zu den grundlegenden Definitionen:

Definition 5.3.1. 1. Eine Log-Gruppe $\underline{\mathcal{A}}$ über $\underline{S}^{\text{val}}$ heißt *log-semiabelsch*, wenn gilt:

(a) $\underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ ist quasikompakt, eigentlich und log-glatt.

(b) Die geometrischen Fasern von $\underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ sind zusammenhängend:

Für jeden Körper k mit Standard Log-Struktur $k^{\times} \oplus \pi^{\mathbb{N}}$ und jeden kategorischen Punkt $v \in \underline{S}(\underline{k})$ ist das folgende Faserprodukt zusammenhängend.

$$\underline{\mathcal{A}} \times_{\underline{S}^{\text{val}}} \text{Spec}(\underline{k}).$$

2. Ist $\underline{\mathcal{A}}$ log-semiabelsch und vertikal, so heißt die Log-Gruppe $\underline{\mathcal{A}}$ log-abelsch.

Bemerkung 5.3.2. Die abstrakte Bedingung an die geometrischen Fasern in der Definition ist äquivalent zu dem folgenden praktischen Kriterium:

Für einen Augenblick nimmt man an, dass \underline{S} kombinatorisch regulär ist.

Es sei \underline{A} ein fs ganzes Modell von $\underline{\mathcal{A}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es existiert eine ganze Abbildung $\underline{A} \rightarrow \underline{S}$, welche die Strukturabbildung induziert.
2. Der Nullschnitt von $\underline{\mathcal{A}}$ ist induziert durch einen strikten Schnitt $\underline{S} \rightarrow \underline{A}$.

Nach Theorem 3.3.17 existiert über einer geeigneten Log-Aufblasung von \underline{S} ein ganzes Modell mit diesen Eigenschaften, zumindest wenn S quasikompakt ist.

Man kann nun zeigen, dass die geometrischen Fasern von $\underline{A}^{\text{val}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ genau dann zusammenhängend sind, wenn die Fasern von $A \rightarrow S$ zusammenhängend sind.

Konvention. Die log-(semi)abelsche Log-Gruppen ebenso wie ihre ganzen Modelle nennt man der Einfachheit halber log-(semi)abelsche Schemata.

Aus den Definitionen erhält man:

Proposition 5.3.3. Log-(Semi)abelizität ist stabil unter Basiswechseln.

Die folgenden Beispiele bringen etwas Licht in die Definitionen.

Beispiel 5.3.4. Es sei \underline{A} log-abelsch über S mit der trivialen Log-Struktur. Dann trägt auch A die triviale Log-Struktur. Somit ist A ein gewöhnliches abelsches Schema.

Beispiel 5.3.5. Im log-semiabelschen Fall gilt die Aussage in Beispiel 5.3.4 nicht. Denn ein Log-Torus $\text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}})$ ist log-semiabelsch über S mit der trivialen Log-Struktur.

Auf der anderen Seite ist ein klassisches semiabelsches Schema G nicht log-semiabelsch. Es sei denn, G ist eigentlich und damit ein gewöhnliches abelsches Schema.

Beispiel 5.3.6. Eine strikte log-semiabelsche Log-Gruppe $\underline{\mathcal{A}}$ ist im Sinne von Korollar 5.1.5 klassisch abelsch. Ist die Basis quasikompakt, so ist $\underline{\mathcal{A}}$ nach Proposition 5.1.4 durch ein gewöhnliches abelsches Schema induziert.

Beispiel 5.3.7. Dieses Beispiel stammt von K. Kato (§2.2 in [20]). Hier tauchte der Begriff einer log-abelschen Varietät zum ersten Mal auf.

Es sei R ein diskreter Bewertungsring. Weiterhin sei E eine semi-stabile degenerierende elliptische Kurve über R . Man versieht R, E mit den Standard Log-Strukturen.

Kato machte nun die beiden folgenden Feststellungen (die erste ist trivial):

- Es ist \underline{E} ein vertikales und log-glattes Log-Schema über \underline{R} .
- Die Guppenstruktur der generischen Faser hat eine Fortsetzung auf $\underline{E}^{\text{val}}$.

Man erhält somit, dass \underline{E} ein log-abelsches Schema über \underline{R} ist. $\underline{E}^{\text{val}}$ (oder manchmal auch die spezielle Faser) heißt Tate-Kato Kurve [20].

Die Tate-Kato enthält das Neron-Modell der generischen Faser als eine Untergruppe.

Ist R vollständig, so kann die klassische Tate-Kurve in der rigiden Geometrie via Raynauds Theorem ganz ähnlich interpretiert werden: Die formelle Kompletterung an der speziellen Faser \widehat{E} ist modulo formelle Aufblasungen eine Gruppe.

Bemerkung 5.3.8. Auch im höherdimensionalen Fall kann man zeigen, dass toroidale Degenerationen abelscher Varietäten log-abelsch sind. Dies zeigt zum Beispiel die schöne Darstellung der Faltings-Chai Konstruktion in [23] ohne auf Details einzugehen. Die umgekehrte Frage, wann eine log-abelsche Varietät $\underline{\mathcal{A}}$ Degeneration einer abelschen Varietät ist, wird im total degenerierenden Fall in Theorem 5.7.12 beantwortet: Hierzu ist äquivalent, dass $\underline{\mathcal{A}}$ projektiv ist, d.h. eine projektives ganzes Modell hat.

Sehr wichtig für die Theorie der log-semiabelschen Varietäten ist das folgende Theorem. Es zeigt, dass log-semiabelsche Schemata stets semiabelsche Reduktion haben.

Theorem 5.3.9. *Es sei $\underline{\mathcal{A}}$ eine log-semiabelsche Log-Gruppe über $\underline{S}^{\text{val}}$.*

Dann ist der strikte Anteil $\underline{\mathcal{G}} \hookrightarrow \underline{\mathcal{A}}$ klassisch semiabelsch im Sinne von Korollar 5.1.5.

Hieraus erhält man das folgende wichtige Korollar:

Korollar 5.3.10. *Eine log-semiabelsche Log-Gruppe ist kommutativ.*

Beweis. Das Zentrum von $\underline{\mathcal{A}}$ ist eine abgeschlossene strikte Log-Untergruppe. Ferner enthält das Zentrum nach Theorem 5.3.9 eine offene Untergruppe. Weil die geometrischen Fasern von $\underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ zusammenhängend sind, folgt die Behauptung. \square

Der Beweis von Theorem 5.3.9

Die strikte Log-Gruppe $\underline{\mathcal{G}}$ ist nach Voraussetzung glatt über der Basis. Daher reicht es nach Bemerkung B.0.18 zu zeigen, dass die geometrischen Fasern von $\underline{\mathcal{G}} \rightarrow \underline{S}^{\text{val}}$ semiabelsche Varietäten sind. Daher kann man annehmen, dass die Basis ein algebraisch abgeschlossener Körper k ist mit der Standard Log-Struktur $\pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}$. In dieser Situation ist $\underline{\mathcal{G}}$ eine gewöhnliche zusammenhängende glatte k -Gruppenvarietät G .

Für den Beweis der Semiabelizität von G kann man offensichtlich Basiswechsel mit Kufge Erweiterungen $\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[\varepsilon]{\pi}]$ durchführen (Definition 3.3.10). Am Rande sei erwähnt, dass $\underline{k}[\sqrt[\varepsilon]{\pi}]$ nicht von dem Parameter π abhängt, weil k algebraisch abgeschlossen ist.

Der Beweis des Theorems beruht auf der folgenden Konstruktion:

Konstruktion 5.3.11. Es sei \underline{A} ein ganzes Modell von $\underline{\mathcal{A}}$ ohne Selbstüberschneidung.

Man betrachtet die kanonische Stratifizierung von A . Die Strata sind nach Theorem 3.2.10 glatte k -Varietäten. Man wählt für die Konstruktion ein festes abgeschlossenes Stratum $D \subset A$ und versieht es mit der Pullback Log-Struktur unter der kanonischen Inklusion $D \hookrightarrow A$, so dass die Charakteristik $\overline{\mathcal{M}}_D$ eine konstante Garbe M ist.

Der assoziierte Polyederkegelkomplex $\text{Keg}(\underline{A})$ besitzt als Zelle den Polyederkegel

$$\Sigma = \text{Hom}(M, \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Man wählt eine diskrete Bewertung $\nu : M \rightarrow \mathbb{N}$ (= surjektiven Homomorphismus), die einen rationalen Punkt ν in dem Inneren von Σ entspricht. Dieser Punkt erzeugt eine rationale Halbgerade $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \nu$ in dem rationalen Polyederkegel Σ .

Es sei $\varphi : \pi^{\mathbb{N}} \rightarrow M$ der kanonische Homomorphismus. Nach den Vorbemerkungen kann man \underline{A} ersetzen durch den fs Basiswechsel mit $\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[\epsilon]{\pi}]$. Wählt man speziell

$$e = \nu(\varphi(\pi)),$$

so kann man von Beginn der Konstruktion an annehmen, dass gilt

$$\nu(\varphi(\pi)) = 1.$$

Die rationale Unterteilung $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \nu$ von $\text{Keg}(\underline{A})$ induziert eine Log-Modifikation

$$\underline{A}_\nu = \underline{A} \times_{\text{Keg}(\underline{A})} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \nu.$$

Nach Theorem 3.2.10 ist das abgeschlossene Unterschema D definiert durch ein kohärentes Ideal $\mathcal{P}_D \subset \mathcal{M}_A$. Man beachte, dass trivialerweise gilt

$$D = \text{Star}_A(D).$$

Weil \mathcal{P}_D über A_ν von dem Parameter π erzeugt wird, faktorisiert die Abbildung $\underline{A}_\nu \rightarrow \underline{A}$ über die strikte abgeschlossene Imersion $\underline{D} \hookrightarrow \underline{A}$. Daher ist \underline{A}_ν kanonisch isomorph zu

$$\underline{D}_\nu = \underline{D} \times_\Sigma \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \nu.$$

Die Log-Modifikation \underline{D}_ν ist wohldefiniert, denn es gilt $\text{Keg}(\underline{D}) = \Sigma$.

Man bildet nun den k -Torus mit Charaktergruppe $\Lambda = \text{Ker}(\nu^{\text{gp}} : M^{\text{gp}} \rightarrow \mathbb{Z})$

$$T = \text{Hom}_k(\Lambda, \mathbb{G}_m).$$

Das unterliegende Schema von \underline{D}_ν ist ein $T \times_S D$ -Torsor und der Quotient ist

$$\underline{D}_\nu/T \xrightarrow{\sim} D.$$

Nach Konstruktion ist $\nu(\varphi(\pi)) = 1$. Somit ist ν eine Spaltung von φ . Weil k algebraisch abgeschlossen ist, hat man folglich einen *rationalen Log-Punkt* $p \in \underline{A}_\nu(\underline{k})$.

Zusammengefaßt erhält man via Translation mit p kanonische Isomorphismen

$$G \xrightarrow{\sim} \underline{A}_\nu \xrightarrow{\sim} \underline{D}_\nu.$$

Hiermit kann man nun endlich zeigen:

Proposition 5.3.12. *Die k -Gruppenvarietät G ist eine Erweiterung einer abelschen Varietät durch den Torus T . Insbesondere ist G semiabelsch.*

Beweis. Die Notation sei wie in obiger Konstruktion.

Nach obiger Konstruktion ist G ein Torsor unter dem D -Torus $T \times_k D$. Die Charaktere $\lambda \in \Lambda$ sind nur bis auf Einheiten in k^\times definiert als Funktionen auf

$$G \times_D \{0_G\}.$$

Durch die Bedingung $\lambda(0_G) = 1$ bestimmt man sie eindeutig. Hierdurch kann man T als eine abgeschlossene Untervarietät von G auffassen.

Man benutzt nun einem bekannten *Struktursatz von Chevalley* ([6], Exposé 8). Hiernach ist die glatte, zusammenhängende Gruppenvarietät G eine Erweiterung

$$1 \rightarrow W \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

mit B einer abelschen Varietät und W einer affinen linearen Gruppe.

Weil jede Abbildung von einer rationalen Varietät in die abelsche Varietät B konstant ist, induziert die Operation des Torus T auf G eine kanonische Operation auf W . Der Quotient W/T existiert und ist eine abgeschlossene und affine Untervarietät in G/T . Folglich ist mit $G/T \simeq D$ auch W/T eine eigentliche Varietät und besteht somit aus einem Punkt. Insbesondere sind W, T als k -Varietäten kanonisch isomorph.

Angenommen W ist kein Torus. Dann ist der unipotente Anteil nichttrivial und somit enthält W die additive Gruppe $\mathbb{G}_{a,k}$. Dies kann nicht sein, denn W ist als k -Varietät isomorph zu einem Torus und bekanntlich ist jede Abbildung $\mathbb{G}_{a,k} \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ konstant. \square

Damit ist das Theorem 5.3.9 vollständig bewiesen. \square

Als Anwendung erhält man die folgenden beiden Korollare:

Korollar 5.3.13. *Es sei G eine glatte zusammenhängende Gruppenvarietät über dem Körper k . Dann existiert eine toroidale log-semiabelsche Kompaktifizierung $G \hookrightarrow Q$, genau dann wenn G eine semiabelsche Varietät ist.*

Korollar 5.3.14. *Es seien R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und A_η eine abelsche K -Varietät. Dann existiert eine toroidale log-abelsche Kompaktifizierung $A_\eta \hookrightarrow A$, genau dann wenn A semiabelsche Reduktion hat.*

Eine weitere wichtige Anwendung von Theorem 5.3.9 betrifft die stabil semiabelischen Schemata von Alexeev in Anhang B. Man betrachtet hierfür die folgende Situation:

Es seien $\underline{\mathcal{A}}$ ein log-semiabelsches Schema über $\underline{S}^{\text{val}}$ und $\underline{\mathcal{G}}$ der strikte Anteil. Man wählt ganze Modelle \underline{A}, G von $\underline{\mathcal{A}}$ bzw. $\underline{\mathcal{G}}$. Nach geeigneten Log-Aufblasungen liefert die Log-Gruppenstruktur auf $\underline{\mathcal{A}}$ folgende zusätzlich Daten:

1. G ist ein klassisches Gruppenschema über S .
2. Man hat eine Operation von G auf dem Schema A .
3. Man hat eine equivariante offene Immersion $G \hookrightarrow A$.

Diese Daten sind stabil unter fs Basiswechseln, wie man sieht.

Man erhält nun das folgende Korollar zu Theorem 5.3.9.

Korollar 5.3.15. *Nach einem fs Basiswechsel mit einer geeigneten surjektiven log-fqe Abbildung ist $G \hookrightarrow A$ ein stabil-semiabelsches Schema über S (Definition B.0.20).*

Beweis. Man wendet nun Theorem 3.3.17 an. Hiernach erreicht man durch fs Basiswechsel mit einer geeigneten surjektiven log-fqe Abbildung, dass $\underline{A} \rightarrow \underline{S}$ saturiert ist.

Dann erfüllt $G \hookrightarrow A$ die Axiome in Definition B.0.20:

- Die geometrischen Fasern von $A \rightarrow S$ sind zusammenhängend.
- Nach Proposition 3.3.7 ist $A \rightarrow S$ flach und die geometrischen Fasern sind Cohen-Macaulay und besitzen Normal-Crossing Singularitäten in Kodimension ≤ 1 .
- Es sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von S . Man versieht die geometrische Faser $A_{\bar{s}}$ mit der Pullback Log-Struktur unter der kanonischen Inklusion $A_{\bar{s}} \hookrightarrow A$. Dann stimmen die $G_{\bar{s}}$ -Orbiten in $A_{\bar{s}}$ mit den durch die Log-Struktur induzierten Strata überein. Nach Proposition 3.2.5 ist der Abschluß eines Stratum eine toroidale Einbettung.
- Mit ähnlichen Argumenten wie im dem Beweis von Proposition 5.3.12 kann man zeigen, dass die Stabilisatoren der $G_{\bar{s}}$ -Operation Tori sind. \square

In nächsten Abschnitten soll die log-semiabelscher Varietäten \underline{A} über \underline{S} noch genauer beschrieben werden. Hierbei sind vorallem zwei Fälle interessant:

1. Die Basis S trägt die triviale Log-Struktur (Abschnitt 5.4).
2. Es ist \underline{A} log-abelsch über einem Körper mit Standard Log-Struktur.

5.4 Toroidale log-semiabelsche Schemata

In diesem Abschnitt werden die projektiven log-semiabelschen Schemata im toroidalen Fall beschrieben, d.h. über einer Basis mit der trivialen Log-Struktur. Das Hauptergebnis ist Theorem 5.4.2. *Hiernach ist jedes toroidale log-semiabelsche Schema das Pushout eines Log-Torus mit einer Toruserweiterung eines abelschen Schemas.*

Konvention. - *In diesem Abschnitt ist das Basis Log-Schema bzw. Schema S durchgehend mit der trivialen Log-Struktur versehen.*

- *Es seien im Folgenden \underline{Q} ein log-semiabelsches S -Schema.*
- *Nach dem fundamentalen Theorem 5.3.9 ist der strikte Anteil G von $\underline{Q}^{\text{val}}$ semiabelsch. In der speziellen Situation ist der strikte Anteil ein gewöhnliches Gruppenschema über S .*
- *Nach einer geeigneten Log-Aufblasung von \underline{Q} hat man eine kanonische Operation von G auf dem Schema \underline{Q} . Die kanonische Inklusion $G \hookrightarrow \underline{Q}$ ist equivariant.*

Bemerkung 5.4.1. In der speziellen Situation kann man in Korollar 5.3.15 auf den log-fqe Basiswechsel verzichten: *A priori ist $G \hookrightarrow \underline{Q}$ ein stabil semiabelsches Schema.*

Das wesentliche Ziel in diesem Abschnitt ist der Beweis des folgenden Theorems über die Klassifikation toroidaler log-semiabelscher Log-Schemata.

Theorem 5.4.2. *Es sei $\underline{Q} \rightarrow S$ projektiv und log-semiabelsch.*

1. *Dann ist der strikte Anteil $G \hookrightarrow \underline{Q}$ global eine Erweiterung*

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

eines projektiven abelschen Schemas B durch einen isotrivialen Torus T .

2. Man wählt ein projektives torisches Schema $T \hookrightarrow P$ und bildet die Log-Gruppe $\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G$, wobei alle Objekte mit den kanonischen Log-Strukturen versehen sind.

Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus von Log-Gruppen

$$\Psi_Q : \underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G \xrightarrow{\sim} \underline{Q}^{\text{val}} \quad \text{mit} \quad \Psi_Q|_G = \text{id}_G.$$

Bemerkung 5.4.3. Sind S das Spektrum eines Körpers und G ein Torus, so ist das Theorem trivial. In diesem Fall ist $T \hookrightarrow Q$ eine Toruseinbettung im Sinne von [22].

Es folgen ein paar Reduktionsschritte für den Beweis von Theorem 5.4.2.

Bemerkung 5.4.4. Es reicht das Theorem nach einem étalen Basiswechsel zu zeigen.

Beweis. Klassisch étale Abbildungen sind log-fqe. Nach Katos Theorem 4.3.16 ist daher jedes étale Abstiegsdatum für eine Abbildung fs valuativer Log-Schemata effektiv.

Somit reicht es zeigen, dass Ψ_Q eindeutig bestimmt ist durch die Bedingung

$$\Psi_Q|_G = \text{id}_G.$$

Für die Fasern ist dies klar, weil $G_s \hookrightarrow Q_s$ eine toroidale Einbettung ist. Aus dem bekannten *Rigiditäts Lemma* in (Proposition 6.1 in [32], Kapitel 6) folgt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 5.4.5. Eine Abbildung $\Psi_Q : \underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G \rightarrow \underline{Q}^{\text{val}}$ mit der Eigenschaft

$$\Psi_Q|_G = \text{id}_G$$

ist automatisch ein Isomorphismus von Log-Gruppen.

Beweis. Mit Proposition 5.1.9 und mit den differentiellen Kriterien in Proposition 3.1.2 sieht man zunächst, dass die Abbildung Ψ_Q log-étale ist.

Weil die Abbildung $\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G \rightarrow S$ eigentlich ist, folgert man aus (Proposition. 3.4.12 in [20]), dass Ψ_Q eine *strikte log-étale Überlagerung* ist. Siehe loc. cit. für Details.

Die Behauptung folgt, weil Ψ_Q einen Isomorphismus induziert

$$\Psi_Q^{-1}(G) \xrightarrow{\sim} G.$$

\square

5.4.6. Ein projektives torisches S -Schema $T \hookrightarrow P$ ist *kohomologisch trivial*, d.h. für die höheren direkten Bilder von \mathcal{O}_P unter $f : P \rightarrow S$ gilt

$$f_* \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_S, \quad R^n f_* \mathcal{O}_P = 0, \quad n > 0.$$

Dies folgt via der Resultate über *Kohomologie und Basiswechsel* in (Theorem 12.11 in [12], Kapitel III) aus den bekannten Resultaten in (Theorem 1 in [22], §3, Kapitel I). Daher gilt nach (Proposition 12.10 in [12], Kapitel III) für einen quasikohärenten \mathcal{O}_S -Modul \mathcal{F}

$$R^n f_*(\mathcal{O}_P \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) = (R^n f_* \mathcal{O}_P) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}.$$

Für den Beweis des Theorem kann man annehmen, dass die Basis $S = S^{\text{red}}$ reduziert ist. Die Reduktion auf diesen Fall erfolgt durch die nächste Proposition.

Proposition 5.4.7. *Es sei $\underline{S} \hookrightarrow \underline{S}'$ eine nilpotente strikte abgeschlossene Immersion, die definiert ist durch ein lokal nilpotentes Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{S'}$. Weiterhin sei \underline{Q}' log-semiabelsches Schema über S' , so dass $\underline{Q} = \underline{Q}' \times_{S'} S$ Theorem 5.4.2 erfüllt.*

Dann erfüllt auch das log-semiabelsche Schema \underline{Q}' Theorem 5.4.2.

Beweis. Die erste Aussage des Theorems ist trivial. Die zweite sieht man wie folgt:

Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass die Schemata S, S' affin sind. Weiterhin reduziert man die Behauptung via Induktion auf den Fall $\mathcal{I}^2 = 0$.

Der strikte Anteil von \underline{Q}' ist global eine Toruserweiterung eines abelschen Schemas

$$1 \rightarrow T' \rightarrow G' \rightarrow B' \rightarrow 0.$$

Nach geeigneten Log-Aufblasungen existiert ein projektives torisches Schema $T' \hookrightarrow P'$ über S' , so dass \underline{Q} kanonisch isomorph ist zu $\underline{P} \amalg_{T'} G$ mit $\underline{P} = \underline{P}' \times_{S'} S$.

Man benutzt nun *Olssons logarithmische Deformationstheorie* in [35] für den Beweis, dass die Inklusion $\underline{P} \hookrightarrow \underline{Q}$ eine Ausdehnung hat zu einer Abbildung $\underline{P}' \hookrightarrow \underline{Q}'$.

Die Obstruktion hierfür ist nach (Theorem 5.8 in [35]) ein Element in

$$H^1(P, \text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\Omega_{P/S}, \mathcal{O}_P) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{I}).$$

Nach der obigen Bemerkung 5.4.6 verschwindet diese Kohomologiegruppe aber.

Man erhält somit eine Ausdehnung $\underline{P}' \hookrightarrow \underline{Q}'$. Diese induziert den Isomorphismus

$$\Psi_{Q'} : (\underline{P}' \amalg_{T'} G')^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} (\underline{Q}')^{\text{val}}.$$

□

Bemerkung 5.4.8. Es seien \underline{S}' ein fs Log-Schema und $\underline{\mathcal{A}}'$ eine log-glatte Log-Gruppe über \underline{S}' . Weiterhin sei $\underline{S} \hookrightarrow \underline{S}'$ eine strikte nilpotente Immersion.

Der Beweis der Proposition zeigt dann, dass jeder offene Immersion

$$\underline{P}^{\text{val}} \hookrightarrow \underline{\mathcal{A}}' \times_{\underline{S}'} \underline{S},$$

mit $\underline{P}^{\text{val}}$ einem Log-Torus über \underline{S} , eine eindeutige Ausdehnung über \underline{S}' hat.

Man benötigt im weiteren Verlauf den Begriff eines *exzellenten diskreten Bewertungsringes*. Auf die genaue Definition kann man hier verzichten. Die einzige relevante Eigenschaft ist, dass die Normalisierung jeder ganzen affinen R -Algebra endlich über dieser ist.

Proposition 5.4.9. *Das Theorem 5.4.2 gilt, falls das Basisschema $S = \text{Spec}(R)$ das Spektrum eines exzellenten diskreten Bewertungsringes oder eines Körpers ist.*

Beweis. Zu 1.) Nach (Korollar 2.11 in [9]) ist G genau dann global eine Toruserweiterung, wenn der Torusrang der Fasern $t_s \in \mathbb{N}$, $s \in S$ konstant ist. Der Beweis von Theorem 5.3.9 zeigt, dass der Torusrang wie folgt mit Log-Struktur zusammenhängt

$$t_s = \text{Max}(\dim(\overline{\mathcal{M}}_{Q,x}); x \in Q_s).$$

Aus Proposition 3.2.11 folgert man dann, dass t_s in der Tat konstant ist.

Dass der Torusanteil von G isotrivial ist, folgt aus der Normalität von S .

Zu 2.) Es sei P die Normalisierung des Abschlusses von T in G . Dann operiert der Torus T auf P und man hat eine T -equivariante offene Imersion $T \hookrightarrow P$. An dieser Stelle ist noch nicht bekannt, ob $T \hookrightarrow P$ eine Toruseinbettung ist im Sinne von (5.2.2). Denn möglicherweise ist in der speziellen Faser T_0 kein dichter Teil von P_0 .

Man erhält schließlich via Amalgam eine kanonische G -equivariante Abbildung

$$\Psi : P \amalg_T G \rightarrow Q.$$

Die Abbildung ist eigentlich und birational und sie hat endliche Fasern. Denn in den Fasern respektiert ψ die Dimension der G -Orbiten. Weil Q normal ist, ist die Abbildung Ψ nach *Zariskis Hauptsatz* ein Isomorphismus. Insbesondere ist T_0 dicht in P_0 . Denn ansonsten wäre G_0 nicht dicht in Q_0 , was natürlich nicht sein kann.

Nach Bemerkung 5.2.6 ist somit $T \hookrightarrow P$ torisch und die Behauptung folgt. \square

Es sei nun S wieder eine allgemeine Basis. Es sei daran erinnert, dass für Punkte

$$s, t \in S \quad \text{mit} \quad s \in \{t\}^{\text{cls}}$$

eine Abbildung $\iota : \text{Spec}(R) \rightarrow S$ mit R einem exzellenten diskreten Bewertungsring existiert, so dass $\{s, t\}$ das Bild von ι ist. Man erhält somit aus Proposition 5.4.9:

Korollar 5.4.10. *Es seien \underline{Q} log-semiabelsch über S und G der strikte Anteil von \underline{Q} . Dann ist G global eine Erweiterung eines abelschen Schemas B durch einen Torus T .*

5.4.11. Man betrachtet die spezielle Basis $S = \text{Spec}(R)$ mit R einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring. Weiterhin nimmt man an, dass der Torus T zerfällt.

Wiefolgt konstruiert man einen kanonischen injektiven Homomorphismus

$$\psi : \Lambda \hookrightarrow \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}). \quad (5.1)$$

Es gilt nach Proposition 5.4.9 kanonisch $\underline{Q} = \underline{P} \amalg_T G$, wobei $T \hookrightarrow P$ ein projektives torisches R -Schema ist. Die Inklusion $\underline{P} \hookrightarrow \underline{Q}$ stellt einen Isomorphismus her

$$\Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}).$$

Die Abbildung ψ definiert man nun als Komposition kanonischer Abbildungen

$$\psi : \Lambda \hookrightarrow \Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}) \rightarrow \Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}).$$

Es sei nun wieder S eine beliebige Basis und $f : Q \rightarrow S$ log-semiabelsch. Das folgende Korollar gibt eine Interpolation der Abbildung (5.1) über der Basis S . *Man beachte, dass die Bildung von $f_* \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}}$ nach Proposition 3.2.11 mit Basiswechseln vertauscht.*

Proposition 5.4.12. *Es existiert ein eindeutiger Monomorphismus étaler Garben*

$$\psi : \Lambda \hookrightarrow f_* \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}},$$

der mit Basiswechseln vertauscht und auf den Fasern mit (5.1) übereinstimmt.

Beweis. Man kann annehmen, dass Λ konstant und S zusammenhängend ist. Man wählt ein $s \in S$ und definiert ψ auf den Schnitten als Komposition kanonischer Abbildungen

$$\psi : \Gamma(S, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \Lambda_s \xrightarrow{\psi_s} \Gamma(Q_s, \overline{\mathcal{M}}_{Q_s}^{\text{gp}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}).$$

Hierbei ist ψ_s die oben definierte kanonische Abbildung (5.1).

Man muß zeigen, dass die Abbildung ψ unabhängig von der Wahl des Punktes s ist. Hierfür benutzt man ein einfaches Spezialisierungsargument:

Wählt man einen zweiten Punkt t , so sei dieser ohne Einschränkung eine Generisierung oder Spezialisierung von s . Dann findet man einen exzellenten diskreten Bewertungsring R , der s, t dominiert. Man kann Q durch den Basiswechsel mit $\text{Spec}(R) \rightarrow S$ ersetzen. In dieser Situation folgt dann die Behauptung aus den Ausführungen in 5.4.11. \square

Konvention. *Man identifiziert Λ via ψ mit einer Untergarbe von $f_* \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}$.*

Nach Proposition 3.2.11 ist die Monodromie der lokal konstanten Garbe $f_* \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}}$ endlich, d.h. die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ operiert über einen endlichen Quotienten.

Somit ist auch die Monodromie von Λ endlich und man erhält das folgende Korollar:

Korollar 5.4.13. *Der Torusanteil T ist isotrivial.*

Proposition 5.4.14. *Es sei R ein Körper oder ein diskreter Bewertungsring.*

Weiterhin sei T zerfallender Torus und $T \hookrightarrow P$ ein projektives torisches Schema über R . Es seien G eine Erweiterung eines abelschen R -Schemas B durch den Torus T und

$$\underline{Q} := \underline{P} \amalg_T G.$$

Dann sitzt die Picard-Gruppe $\text{Pic}(Q)$ in der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Pic}(B) \rightarrow \text{Pic}(Q) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}) / \Lambda \rightarrow 1. \quad (5.2)$$

Beweis. Man hat eine kanonische Faserung $\Pi : Q \rightarrow B$. Die Faserung Π hat einen Schnitt. Somit induziert Π einen kanonischen injektiven Homomorphismus

$$\text{Pic}(B) \hookrightarrow \text{Pic}(Q).$$

Die kanonische Inklusion $P \hookrightarrow Q$ induziert einen Homomorphismus

$$\varphi : \text{Pic}(Q) \rightarrow \text{Pic}(P).$$

Man betrachtet die kanonische kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_P^\times \rightarrow \mathcal{M}_P^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}} \rightarrow 1.$$

Es gilt offensichtlich $\Gamma(P, \mathcal{M}_P^{\text{gp}}) = \Lambda \oplus R^\times$ und $H^1(P, \mathcal{M}_P^{\text{gp}}) = H^1(P, \mathcal{O}_T^\times) = 1$.

Die Auswertung der exakten Sequenz mit $\Gamma(P, \cdot)$ liefert somit einen Isomorphismus

$$\Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}})/\Lambda \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(P).$$

Nun gilt, wie in 5.4.11 schon benutzt, $\Gamma(P, \overline{\mathcal{M}}_P^{\text{gp}}) = \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}})$. Durch Auswertung der kanonischen kurzen exakten Sequenz zu $\mathcal{M}_Q^{\text{gp}}$ erhält man eine Abbildung

$$\Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}) \rightarrow \text{Pic}(Q).$$

Zusammengefaßt hat man einen kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi : \text{Pic}(Q) \rightarrow \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}})/\Lambda.$$

Es liegt $\text{Pic}(B)$ in dem Kern von φ . Es sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf Q , die in $\text{Ker}(\varphi)$ liegt. Man muß zeigen, dass \mathcal{L} das Pullback einer invertierbaren Garbe auf B ist.

In der speziellen Situation steigt $\mathcal{L}|_G$ zu einer invertierbaren Garbe \mathcal{R} auf B ab (Bemerkung 7.2.4 in [29]). Indem man \mathcal{L} durch $\mathcal{L} \otimes \mathcal{R}^{-1}$ ersetzt, erreicht man, dass $\mathcal{L}|_G$ trivial ist. Dann existiert ein Cartier-Divisor D zu \mathcal{L} mit Support in $Q - G$.

Man hat nun via $D \mapsto T \cap D$ eine eindeutige Korrespondenz zwischen den irreduziblen Weil-Divisoren von Q und T mit Support in $Q - G$ bzw. $P - T$. Nach obigen Ausführungen ist $D \cap T$ der Nullstellendivisor eines Charakters $\lambda \in \Lambda$.

Daher steigt \mathcal{L} nach B ab. Der zugehörigen \mathbb{G}_m -Torsor ist das Pushout von

$$G \leftrightarrow T \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_{m,R}.$$

□

Der Beweis von Theorem 5.4.2 wird nun in zwei Schritten erbracht. In dem ersten Fall ist der abelsche Anteil von G trivial. In diesem Fall ist der Beweis nicht sehr aufwendig. Für den allgemeinen Fall benötigt man kubische Strukturen.

Proposition 5.4.15. *Das Theorem 5.4.2 gilt, falls $G = T$ ein Torus ist.*

Beweis. Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass der Torus T zerfällt.

Es ist $Q \rightarrow S$ eine flache Familie projektiver torischer Varietäten. Der relative Picard-Funktor $\text{Pic}_{Q/S}$ ist darstellbar durch ein Schema lokal von endlichem Typ über S .

Weiterhin folgt aus den Kriterien in (Theorem 1, Proposition 2 in [5], Kapitel 8), dass $\text{Pic}_{Q/S}$ formell étale über S ist. Denn die Fasern Q_s , $s \in S$ sind nach 5.4.6 kohomologisch trivial.

Die Auswertung der kanonischen kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_Q^\times \rightarrow \mathcal{M}_Q^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}} \rightarrow 1$$

mit Hilfe des direkten Bildfunktors f_* liefert eine kanonische Abbildung

$$f_* \overline{\mathcal{M}}_X^{\text{gp}} \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}.$$

Proposition 5.4.14 zeigt, dass die Abbildung einen Isomorphismus induziert

$$f_* \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}} / \Lambda \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_{Q/S}.$$

Hieraus folgt, dass die Charaktere $\Lambda \in \Lambda$ eine Liftung nach $\Gamma(Q, \mathcal{M}_Q^{\text{gp}})$ haben. Denn die Obstruktion hierfür liegt in $H^1(Q, \mathcal{O}_Q^\times)$. Nach obigen Ausführungen verschwindet diese.

Indem man die Liftungen im Nullschnitt normiert, erhält man den Isomorphismus

$$\Psi_Q : \underline{Q}^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}}) = \underline{P}^{\text{val}}.$$

□

5.4.16. Man benötigt im Folgenden einige Fakten über *kubische Strukturen*:

Es seien G Gruppenschema über S und \mathcal{L} ein \mathbb{G}_m -Torsor auf G . Eine kubische Struktur auf \mathcal{L} ist eine Trivialisierung auf $G^3 := G \times_S G \times_S G$:

$$\tau : \mathbb{G}_{m, G^3} \longrightarrow D_3(\mathcal{L}) := \bigotimes_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,3\}} m_I^* \mathcal{L}^{\otimes (-1)^{|I|+1}},$$

die gewissen Symmetrie - und Kozykelbedingungen genügt (Definition 2.4.5 in [29]). Hierbei sind $m_I : G^3 \rightarrow G$, $I \subseteq \{1, 2, 3\}$ die entsprechenden Multiplikationsabbildungen.

Eine kubische Struktur auf \mathcal{L} induziert eine kanonische Rigidifizierung im Nullschnitt.

Ist G abelsch oder semiabelsch und S zusätzlich normal, so ist die kubische Strukturen eindeutig durch die induzierte Rigidifizierung bestimmt (2.6 in [29]).

Bemerkung 5.4.17. Es seien $S = S^{\text{red}}$ ein reduziertes Schema und

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

eine Erweiterung eines abelschen Schemas durch einen Torus über S . Weiterhin sei \mathcal{L} ein rigidifizierter \mathbb{G}_m -Torsor auf G , so dass $D_3(\mathcal{L}) \simeq \mathbb{G}_{m, G^3}$ trivial ist.

Dann trägt \mathcal{L} eine eindeutige mit der Rigidifizierung kompatible kubische Struktur.

Beweis. Die Trivialisierungen von $D_3(\mathcal{L})$, die mit der Rigidifizierung verträglich sind, bilden eine diskrete Menge. Denn die Basis S ist reduziert. Mit einem Spezialisierungsargument reduziert man die Behauptung daher auf einen diskreten Bewertungsring. In diesem Fall ist die Behauptung aber bekannt (siehe 5.4.16). □

Proposition 5.4.18. *Es sei S reduziert und \mathcal{L} ein rigidifizierter \mathbb{G}_m -Torsor auf Q .*

Dann trägt $\mathcal{L}|_G$ eine eindeutige mit der Rigidifizierung kompatible kubische Struktur.

Beweis. Aus trivialen Gründen existiert eine Log-Aufblasung

$$\underline{X} = \underline{Q}_T^3,$$

so dass der \mathbb{G}_m -Torsor $D_3(\mathcal{L}|_G)$ eine Ausdehnung zu einem \mathbb{G}_m -Torsor \mathcal{R} auf X hat.

Den induzierten Zariski \mathcal{M}^{gp} -Torsor bezeichnet man mit

$$\underline{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{O}_X^\times} \mathcal{M}_X^{\text{gp}}.$$

Mit Hilfe von étalem Abstieg reduziert man die Behauptung auf den Fall, dass die lokal konstanten Garben Λ und $\Xi = f_* \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}$ konstant sind (siehe Proposition 3.2.11).

Weiterhin nimmt man an, dass S zusammenhängend ist. Dann kann man die konstanten Garben Λ, Ξ mit ihren globalen Schnitten identifizieren.

Nach der obigen Bemerkung 5.4.17 reicht es zu zeigen, dass der \mathcal{M}^{gp} -Torsor $\underline{\mathcal{R}}$ trivial ist.

Man sieht leicht, dass der Quotient Ξ/Λ frei abelsch ist. Folglich kann man eine Spaltung wählen $d : \Xi/\Lambda \rightarrow \Xi$. Man betrachtet daraufhin die Verkettung

$$\psi : \Xi/\Lambda \xrightarrow{d} \Xi = \Gamma(Q, \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}}) \longrightarrow \text{Pic}(Q),$$

wobei $\Xi \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}$ durch Auswertung der kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_Q^\times \rightarrow \mathcal{M}_Q^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_Q^{\text{gp}} \rightarrow 1$$

mit dem globale Schnitte Funktor $\Gamma(Q, \cdot)$ entsteht.

Für einen Punkt $s \in S$ betrachtet man die kanonische Abbildung

$$\varphi_s : \text{Pic}(Q_s) \rightarrow \Gamma(Q_s, \overline{\mathcal{M}}_{Q_s})/\Lambda_s = \Xi/\Lambda$$

in der Sequenz (5.2), wobei Q_s die Faser über dem Punkt s ist.

Analog wie in dem Beweis von Proposition 5.4.12 zeigt man mit Hilfe eines Spezialisierungsarguments, dass die folgende Komposition unabhängig von s ist:

$$\varphi : \text{Pic}(Q) \rightarrow \text{Pic}(Q_s) \rightarrow \Xi/\Lambda$$

Man reduziert hierfür die Behauptung auf den Fall, dass S das Spektrum eines exzellenten Bewertungsrings ist und benutzt dann Proposition 5.4.14.

Es ist ψ eine Spaltung von φ . Für ein $a \in \Xi/\Lambda$ bezeichne \mathcal{L}_a der \mathbb{G}_m -Torsor zu dem $\psi(a)$. Der induzierte \mathcal{M}^{gp} -Torsor $\underline{\mathcal{L}}_a$ ist trivial, so dass man \mathcal{L} ersetzen kann durch

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_a^{-1} \quad \text{mit} \quad a = \varphi(\mathcal{L}).$$

Die exakte Sequenz (5.2) zeigt dann, dass $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}|_{Q_s}$ in dem Bild ist von

$$\text{Pic}(B_s) \hookrightarrow \text{Pic}(Q_s)$$

und somit nach B_s absteigt. Aus den *Theorem of the Cube* für abelsche Varietäten folgert man dann, dass \mathcal{R} zumindest in den Fasern von $X \rightarrow S$ trivial ist.

Hieraus erhält man, dass \mathcal{R} trivial ist. Weil der Picard-Funktor $\text{Pic}_{X/S}$ darstellbar ist und die Basis S reduziert ist, kann man die Trivialität faserweise überprüfen. \square

Bemerkung 5.4.19. Mit Hilfe der Strukturtheorems 5.4.2 kann man leicht zeigen, dass das toroidale log-semiabelsche Schema \underline{Q} das *Theorem of the Cube* erfüllt:

Jeder rigidifizierte Zariski \mathcal{M}^{gp} -Torsor auf der Log-Gruppe $\underline{Q}^{\text{val}}$ besitzt eine eindeutige kubische Struktur, die mit der Rigidifizierung verträglich ist.

Man kann nun endlich das Theorem 5.4.2 in voller Allgemeinheit beweisen.

Proposition 5.4.20. *Das Theorem 5.4.2 gilt im Allgemeinen.*

Beweis. Man kann nach Proposition 5.4.7 annehmen, dass $S = S^{\text{red}}$ reduziert ist.

Man wählt eine rigidifizierte ample invertierbare Garbe \mathcal{L} auf Q . Nach Proposition 5.4.18 trägt die Einschränkung $\mathcal{L}|_G$ eine kanonische kubische Struktur. Somit kann man nach einem étalem Basiswechsel $\mathcal{L}|_G$ mit einer T -Linearisierung versehen.

Nach Proposition B.0.29 erhält man eine flache, projektive T -invariante, G -equivariante Abbildung $\Pi : Q \rightarrow B$, so dass $\Pi|_G$ die kanonische Projektion ist. Man beachte, dass die Fasern von $Q \rightarrow S$ normal sind und somit in Proposition B.0.29 gilt $\tilde{Q} = Q$.

Versieht man B mit der trivialen Log-Struktur, so erhält man eine Abbildung von Log-Schemata $\Pi : \underline{Q} \rightarrow B$. Die Einschränkung $\Pi|_G$ ist die kanonische Projektion. Somit ist

$$\Pi^{\text{val}} : \underline{Q}^{\text{val}} \longrightarrow B$$

ein Homomorphismus von Log-Gruppen. Aus Proposition 5.1.9 und dem Kriterium in Proposition 3.1.2 folgt, dass die Abbildung Π^{val} log-glatt ist.

Somit ist $\text{Ker}(\Pi^{\text{val}})$ log-semiabelsch. Nach Konstruktion ist der strikte Anteil von $\text{Ker}(\Pi^{\text{val}})$ der Torus T . Nach Proposition 5.4.15 ist $\text{Ker}(\Pi^{\text{val}})$ der Log-Torus

$$\underline{P}^{\text{val}} = \text{Hom}_S(\Lambda, \mathcal{M}^{\text{gp}}).$$

Man erhält schließlich einen kanonischen Homomorphismus valuativer Log-Gruppen

$$\Psi_Q : \underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G \longrightarrow \underline{Q}^{\text{val}},$$

der auf G die Identität ist und somit nach Bemerkung 5.4.5 ein Isomorphismus ist. \square

5.5 Linearisierung valuativer Log-Schemata

In diesem Abschnitt wird die *logarithmische Exponentialabbildung* konstruiert. Mit ihrer Hilfe kann man valuative Log-Schemata in gewisser Weise linearisieren. Die Hauptanwendung der Exponentialabbildung betrifft die Uniformisierung log-abelscher Varietäten im nächsten Abschnitt. In dieser Situation ist wie in der Differentialgeometrie die Exponentialabbildung die universelle Überlagerung. Es sei ausdrücklich bemerkt, dass die Exponentialabbildung eine Spezialität in der logarithmisch algebraischen Geometrie ist, die kein rigid-analytisches oder algebraisches Analogon besitzt.

Konvention. *Es sei k ein Körper mit der Standard Log-Struktur*

$$\mathcal{M}_k = \pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}.$$

In diesem Abschnitt treten auch quasikohärente Log-Strukturen auf, die nicht fs sind.

Man benötigt zunächst eine Reihe von Definitionen. Mit der folgenden Definition kann man die Wertegruppe $\overline{\mathcal{M}}_k^{\text{gp}} = \pi^{\mathbb{Z}}$ von vornherein divisibel machen.

Definition 5.5.1. 1. Es sei $\underline{k}[\sqrt[e]{\pi}]$ der Körper k mit der Log-Struktur

$$k^\times \oplus \pi^{\mathbb{Q}_{\geq 0}}.$$

2. Allgemeiner definiert man für ein fs Log-Schema \underline{X} über \underline{k} :

$$\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}] := (\underline{X} \otimes_{\underline{k}} \underline{k}[\sqrt[e]{\pi}])^{\text{sat}}$$

Bemerkung 5.5.2. Es ist $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]$ ein quasikohärentes, saturiertes Log-Schema. In der Notation von Definition 3.3.10 ist $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]$ isomorph zu dem projektiven Limes

$$\varprojlim_{e \in \mathbb{N}^+} \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}].$$

In der folgenden Definition wird die CW-Topologie auf einem fs valuativen Log-Schema eingeführt. Diese ist schwächer als die gewöhnliche Topologie.

Definition 5.5.3. 1. Es seien \underline{X} ein fs Log-Schema und U ein offener Teil in $\text{Keg}(\underline{X})$. Dann existiert eine Familie rationaler Unterteilungen $\Sigma_i \hookrightarrow \text{Keg}(\underline{X})$ mit

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot U = \bigcup_i \Sigma_i.$$

Somit erhält man in suggestiver Notation einen offenen Unterraum von $\underline{X}^{\text{val}}$:

$$\underline{X}^{\text{val}} \times_{\text{Keg}(\underline{X})} U := \bigcup_i (\underline{X} \times_{\text{Keg}(\underline{X})} \Sigma_i)^{\text{val}}$$

Die Unterräume dieser Form bilden die CW-Topologie auf $\underline{X}^{\text{val}}$.

2. Es seien \underline{X} ein fs Log-Schema über \underline{k} und $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]$ wie in Definition 5.5.1.

Die CW-Topologie auf $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]^{\text{val}}$ wird erzeugt von den Urbildern der CW-offenen Teilmengen in $\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]^{\text{val}}$ für alle $e \in \mathbb{N}^+$ unter den kanonischen Projektionen

$$\underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]^{\text{val}} \rightarrow \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]^{\text{val}}.$$

Bemerkung 5.5.4. Man hat für ein fs Log-Schema \underline{X} eine eindeutige Korrespondenz zwischen CW-offenen Mengen in $\underline{X}^{\text{val}}$ und homogenen offenen Mengen in

$$\text{Keg}(\underline{X})^* := \text{Keg}(\underline{X}) - \{\eta_1, \eta_2, \dots\}.$$

Hierbei sind die η_i die Ecken in $\text{Keg}(\underline{X})$. Falls \underline{X} über \underline{k} vertikal ist, entsprechen die homogenen offenen Mengen in $\text{Keg}(\underline{X})^*$ den offenen Mengen in $\text{Pol}(\underline{X})$.

Bemerkung 5.5.5. Die Definition der CW-Topologie ist unabhängig von dem ganzen Modell. Genauer gilt, dass jede Abbildung fs valuativer Log-Schemata stetig ist bzgl. der CW-Topologie. Insbesondere kann man auch auf abstrakten fs valuativen Log-Schemata, die kein ganzes Modell haben, eine CW-Topologie definieren.

Beispiel 5.5.6. Der vertikale Teil von $\underline{X}^{\text{val}}$ über \underline{k} ist CW-offen.

In dem nächsten Theorem wird die *logarithmische Exponentialabbildung* definiert. Für seine Formulierung betrachtet man man die folgende Situation:

- Man betrachtet die Kategorie der punktierten log-glatten Varietäten über \underline{k} ,

$$(\underline{X}, p) \text{ mit } p : \text{Spec}(\underline{k}) \rightarrow \underline{X} \text{ einem strikten Schnitt.}$$

Dann existiert ein offenes Stratum $D_p \subset X$, das den Punkt p enthält.

- Der Einfachheit halber habe die Log-Struktur \mathcal{M}_X keine Selbstüberschneidung.

Dann erhält man nach Theorem 3.2.10 die toroidale k -Varietät:

$$\text{Star}_X(D_p) = D_p^{\text{cls}}$$

- Ebenfalls mit p bezeichnet man die induzierten Punkte der Polyederkegelkomplexe

$$\text{Keg}(\underline{X}), \quad \text{Keg}(\text{Star}_X(D_p) \otimes_k \underline{k}).$$

Man beachte, dass $\text{Keg}(\text{Star}_X(D_p) \otimes_k \underline{k})$ kanonisch isomorph ist zu

$$\text{Keg}(\text{Star}_X(D_p)) \times \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

- Man definiert dann das folgende valuative Log-Schema

$$\underline{\mathfrak{Tan}}_p := (\text{Star}_X(D_p) \otimes_k \underline{k}[\sqrt[\infty]{\pi}])^{\text{val}}.$$

- Es ist D_p (genauer $D_p \otimes_k \underline{k}[\sqrt[\infty]{\pi}]$) als offener Teil in $\underline{X}[\sqrt[\infty]{\pi}]^{\text{val}}$ und $\underline{\mathfrak{Tan}}_p$ enthalten.

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun das folgende Theorem:

Theorem 5.5.7. 1. *Es existieren CW-offene Umgebungen von p*

$$\underline{\mathfrak{U}} \subset \underline{X}[\sqrt[\infty]{\pi}]^{\text{val}}, \quad \underline{\mathfrak{T}} \subset \underline{\mathfrak{Tan}}_p$$

und ein Isomorphismus valuativer Log-Schemata über $\underline{k}[\sqrt[\infty]{\pi}]$

$$\exp_p : \underline{\mathfrak{T}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathfrak{U}} \text{ mit } \psi|_{D_p} = \text{id}_{D_p}.$$

2. *Die Zuordnung $(\underline{X}, p) \mapsto (\exp_p : \underline{\mathfrak{T}} \rightarrow \underline{\mathfrak{U}})$ ist in dem folgenden Sinne funktoriell:*

Für eine Abbildung $(\underline{X}_1, p_1) \rightarrow (\underline{X}_2, p_2)$ existieren CW-offene Umgebungen

$$\underline{\mathfrak{U}}_i \subset \underline{X}_i[\sqrt[\infty]{\pi}]^{\text{val}}, \quad \underline{\mathfrak{T}}_i \subset \underline{\mathfrak{Tan}}_{p_i}$$

von p_i und ein Isomorphismus $\exp_{p_i} : \underline{\mathfrak{T}}_i \xrightarrow{\sim} \underline{\mathfrak{U}}_i$ mit $\psi|_{D_{p_i}} = \text{id}_{D_{p_i}}$ jeweils für $i = 1, 2$, so dass ein kommutatives Diagramm existiert

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathfrak{T}}_1 & \xrightarrow{\exp_{p_1}} & \underline{\mathfrak{U}}_1 \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \underline{\mathfrak{T}}_2 & \xrightarrow{\exp_{p_2}} & \underline{\mathfrak{U}}_2 \end{array}$$

Hierbei sind f, f' induziert durch $\underline{X}_1 \rightarrow \underline{X}_2$ bzw. $\text{Star}_{X_1}(D_{p_1}) \rightarrow \text{Star}_{X_2}(D_{p_2})$.

Bemerkung 5.5.8. Interessant ist folgende differentialgeometrische Interpretation:

Man kann $\underline{\mathcal{T}}\mathbf{an}_p$ als eine Art Tangentialraum von $\underline{X}[\infty\sqrt{\pi}]^{\text{val}}$ in dem Punkt p auffassen, so dass \exp_p in diesem Sinne die Exponentialabbildung ist.

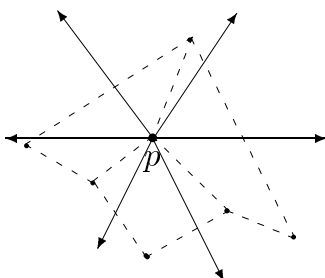
Bemerkung 5.5.9. Für einen Fächer F über $\text{Spec}(\mathbb{N})$ und ein $p \in F(\mathbb{N})$ kann man ganz analog eine kombinatorische Exponentialabbildung konstruieren

$$\exp_p : T \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow F(\mathbb{R}_{\geq 0}),$$

die via dem assoziierten Fächer eine Menge Kompatibilitäten mit der logarithmischen Exponentialabbildung aufweist. Hierbei ist T eine offene Umgebung von p in

$$\text{Star}_F(p)(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

(siehe 3.2.3). Dessen Elemente kann man als *Geodätische-Strahlen* auffassen:



Bemerkung 5.5.10. Es hängt \exp_p nicht von p , sondern nur vom Stratum D_p ab.

Der Beweis von Theorem 5.5.7.

Man schreibt $D = D_p$ und betrachtet die toroidale k -Varietät

$$\underline{Z} = \text{Star}_X(D).$$

Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion, so hat man nach Theorem 3.2.10 eine disjunkte Zerlegung

$$i^* \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Z \amalg i^* \mathcal{P}_D.$$

Hierbei ist \mathcal{M}_Z die kanonische Log-Struktur auf $\text{Star}_X(D)$ und das Ideal $i^* \mathcal{P}_D$ besteht aus den Schnitten von $i^* \mathcal{M}_X$, die nicht auf D invertierbar sind.

Eine zentrale Rolle in dem Beweis spielt das fs Log-Schema

$$(Z, i^* \mathcal{M}_X).$$

Man sieht unschwer, dass der assoziierte Polyederkegelkomplex

$$\Sigma = \text{Keg}(Z, i^* \mathcal{M}_X)$$

der kleinste Unterkomplex von $\text{Keg}(X)$ ist, der alle Zellen σ° mit $p \in \sigma = (\sigma^\circ)^{\text{cls}}$ enthält. Insbesondere enthält Σ die homogene Teilmenge

$$\Sigma^\circ = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \bigcup_{p \in \sigma} \sigma^\circ.$$

Die Konstruktion der Abbildung \exp_p erfolgt nun in drei Schritten:

Konstruktion 5.5.11. *1. Schritt* Man konstruiert eine rationale Unterteilung

$$\Sigma_1 \hookrightarrow \text{Keg}(\underline{X}),$$

die eine offene Umgebung von p enthält und so dass die Log-Modifikation

$$\underline{X}_1 = \underline{X} \times_{\text{Keg}(\underline{X})} \Sigma_1 \rightarrow \underline{X}$$

nach Basiswechsel mit $\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[e]{\pi}]$ und Saturierung über $(Z, i^* \mathcal{M}_X)$ faktorisiert.

Letztere Aussage ist äquivalent dazu, dass Σ_1 enthalten ist in der Teilmenge Σ° .

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist klar. Die andere Richtung sieht man wie folgt.

Die Bedingung impliziert zunächst, dass $X_1 \rightarrow X$ mengentheoretisch über Z faktorisiert. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass X quasikomakt ist. Nach Theorem 3.3.17 existiert eine positive natürliche Zahl e , so dass die Abbildung

$$\underline{X}_1[\sqrt[e]{\pi}] \rightarrow \text{Spec}(\underline{k}[\sqrt[e]{\pi}])$$

saturiert ist. Nach Proposition 3.3.7 ist dann das unterliegende Schema von $\underline{X}_1[\sqrt[e]{\pi}]$ reduziert. Somit erhält man wie gewünscht die Faktorisierung

$$\underline{X}_1[\sqrt[e]{\pi}] \rightarrow (Z, i^* \mathcal{M}_X)[\sqrt[e]{\pi}] \rightarrow \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}].$$

In dieser Situation hat man dann einen kanonischen Isomorphismus

$$[(Z, i^* \mathcal{M}_X) \times_{\underline{X}} \underline{X}_1][\sqrt[e]{\pi}] \xrightarrow{\sim} \underline{X}_1[\sqrt[e]{\pi}]. \quad (5.3)$$

2. Schritt Man betrachtet andererseits die kanonische Abbildung von Log-Schemata

$$j : (Z, i^* \mathcal{M}_X) \longrightarrow \underline{Z} \otimes_k \underline{k} = \underline{Z}_k.$$

Auf den unterliegenden Schemata ist diese Abbildung die Identität. Die Abbildung der Monoidgarben ist induziert durch die Inklusion $\mathcal{M}_Z \hookrightarrow \mathcal{M}_Z \amalg \mathcal{P}_D$. Dann ist

$$\mathcal{N} = j_* i^* \mathcal{M}_X$$

ein quasikohärenter \mathcal{M}_{Z_k} -Untermonoid von $\mathcal{M}_{Z_k}^{\text{gp}}$ und die Abbildung j faktorisiert über die induzierte affine Log-Modifikation (Konstruktion 2.5.8)

$$\underline{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z_k} \otimes_{\mathcal{M}_{Z_k}} \mathcal{N}).$$

Es ist D ein offenes Stratum in Y und es gilt $\text{Star}_Y(D) = \underline{Z}$. Nach Konstruktion stellt die induzierte Abbildung $(Z, i^* \mathcal{M}_X) \rightarrow \underline{Y}$ einen Isomorphismus her

$$\Sigma = \text{Keg}(Z, i^* \mathcal{M}_X) \xrightarrow{\sim} \text{Keg}(\underline{Y}).$$

Ganz analog wie in dem 1. Schritt konstruiert man eine rationale Unterteilung

$$\Sigma_2 \hookrightarrow \text{Keg}(\underline{Z}_k),$$

die eine offene Umgebung des Punktes p enthält und nach fs Basiswechsel mit $\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[e]{\pi}]$ für eine positive natürliche Zahl e einen Isomorphismus induziert

$$\begin{aligned} (Z, i^* \mathcal{M}_X) \times_{\underline{Z}_k} \underline{Z}_{k,2}[\sqrt[e]{\pi}] &\xrightarrow{\sim} \underline{Z}_2[\sqrt[e]{\pi}] \quad \text{mit} \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_k \times_{\text{Keg}(\underline{Z}_k)} \Sigma_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Damit ist auch der zweite Schritt der Konstruktion beendet.

3. Schritt In dem dritten Schritt werden die ersten beiden verbunden:

Man kann Σ_i für $i = 1, 2$ als eine rationale Unterteilung sowohl von $\text{Keg}(\underline{X})$ als auch von $\text{Keg}(\underline{Z}_k)$ auffassen. Wählt man in der Konstruktion $\Sigma_1 = \Sigma_2$, so gilt kanonisch

$$(Z, i^* \mathcal{M}_X) \times_{\underline{X}}^{\text{fs}} \underline{X}_1 \xrightarrow{\sim} (Z, i^* \mathcal{M}_X) \times_{\underline{Z}_k}^{\text{fs}} \underline{Z}_2 \quad (5.5)$$

Damit ist die Konstruktion 5.5.11 beendet und man kann das Theorem beweisen:

Die Abbildungen (5.3, 5.4 und 5.5) liefern einen kanonischen Isomorphismus

$$\underline{Z}_2^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \underline{X}_1^{\text{val}}.$$

Die erste Aussage des Theorems folgt, weil $\underline{X}_1^{\text{val}}$, $\underline{Z}_2^{\text{val}}$ CW-offene Teile enthalten.

Die funktoriellen Eigenschaften der Exponentialabbildung erhält man aus obiger Konstruktion und der Funktorialität von $\text{Star}_X(D)$ in Theorem 3.2.10.

Damit ist das Theorem 5.5.7 vollständig bewiesen. \square

Bemerkung 5.5.12. Eine interessante Frage ist, wann die Exponentialabbildung

$$\exp_p : \underline{\mathcal{T}} \longrightarrow \underline{X}[\sqrt[e]{\pi}]^{\text{val}}$$

einen maximalen CW-offenen Definitionsbereich in $\underline{\mathcal{T}}_{\text{an},p}$ hat. Hiermit verbunden ist das Problem des *Log-Blowing-Downs*, der Umkehroperation der Log-Aufblasung.

Eine allgemeine Antwort auf diese Frage kann in dieser Arbeit nicht gegeben werden, die folgenden Beispiele geben aber einen ersten Eindruck.

Beispiel 5.5.13. Für eine toroidale k -Varietät $D \rightarrow X$ ist die Exponentialabbildung \exp_p zu einem Punkt $p \in D(k)$ im wesentlichen der kanonische Isomorphismus

$$\text{Star}_X(D) \longrightarrow \underline{X}.$$

Trivialerweise ist \exp_p auf dem gesamten Tangentialraum $\underline{\mathcal{T}}_{\text{an},p}$ definiert.

Beispiel 5.5.14. Es seien \underline{A} ein log-abelsche Varietät und $G \hookrightarrow A$ ihr strikter Anteil. Dann trägt \underline{A} als kanonische Punktierung den Nullschnitt.

Das fundamentale *Uniformisierungstheorem 5.6.3* zeigt, dass die Exponentialabbildung im Nullpunkt \exp_0 schon über \underline{k} definiert ist und den gesamten vertikalen Teil von

$$(\text{Star}_A(G) \otimes_k \underline{k})^{\text{val}}$$

als Definitionsbereich hat. *In diesem Fall ist \exp_0 die universelle Überlagerung.*

Beispiel 5.5.15. Es sei an folgende grundlegende Terminologie in [7] bzw. [1] erinnert: Eine flache eigentliche relative Kurve über einem Schema heißt (semi-)stabil, wenn die Fasern Normal-Crossing sind und jede rationale Komponente in einer Faser mindestens zwei (bzw. drei) Doppelpunkte hat. Die Definition in 3.4.7 ist schwächer (siehe unten).

Es sei (R, π) ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k . Man betrachtet zunächst eine normale, stabile R -Kurve Y . Dann ist die spezielle Faser X versehen mit der kanonischen Log-Struktur log-glatt über \underline{k} . Es sei p ein Punkt in $X(k)$, der im glatten Ort von X liegt. Hierzu ist äquivalent, dass p induziert ist durch einen strikten Schnitt

$$p : \text{Spec}(\underline{k}) \hookrightarrow \underline{X}.$$

Dann besitzt die Exponentialabbildung \exp_p einen maximalen Definitionsbereich und mit Hilfe des des Polyederkomplexes $\Gamma = \text{Pol}(\underline{X})$ kann man diesen beschreiben:

Zunächst sei bemerkt, dass Γ im wesentlichen der duale Graph der speziellen Faser ist. Die Ecken p_i von Γ entsprechen den irreduziblen Komponenten und die Kanten e_j den Doppelpunkten von X . Die Kanten von Γ tragen Gewichte $d_j \in \mathbb{N}^+$. Diese sind bestimmt durch die lokalen Gleichungen von Y in einem Doppelpunkt

$$R[x, y]/(x \cdot y - \pi^{d_j}).$$

Die offene Teilmenge $U \subset \Gamma$ definiert man als die Vereinigung der halboffenen Kanten $e_i = [p, p_j)$. Es enthält $\underline{X}[\varpi/\pi]^{\text{val}}$ in suggestiver Notation die CW-offene Teilmenge

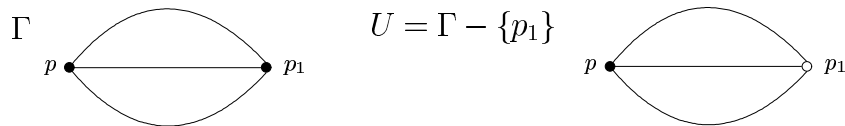
$$\underline{U} = (\underline{X}[\varpi/\pi]^{\text{val}} \times_{\Gamma} U)$$

Die Exponentialabbildung \exp_p induziert dann einen Isomorphismus

$$\exp_p^{-1}(\underline{U}) \xrightarrow{\sim} \underline{U}$$

Man sieht dann, dass $\exp_p^{-1}(\underline{U})$ der maximale Definitionsbereich ist.

Die folgenden Abbildungen illustrieren die obige Situation an einem konkreten Beispiel. Hierbei sind die irreduziblen Komponenten glatte Kurven mit beliebigem Geschlecht.



Nimmt man lediglich an, dass die Kurve Y semi-stabil ist, so kann man nach einem bekannten Theorem von Lipman (Theorem 27.1 in [24]) alle rationalen Komponenten in der speziellen Faser X , die nur zwei weitere Komponenten schneiden, herunterblasen. Entsprechend vergrößert sich der Definitionsbereich von \exp_p .

Nimmt man noch allgemeiner an, dass Y lediglich semi-stabil ist im Sinne von Definition in 3.4.7, so kann man die rationalen Komponenten in X , die nur eine weitere schneiden, zu einem glatten Punkt herunterblasen. Dieser Prozeß ist jedoch nicht mit der Log-Struktur verträglich und somit kein Log-Blowing-Down.

Wie in der komplex analytischen Geometrie erhält man, dass die Exponentialabbildung im Allgemeinen keine Uniformisierung von log-glatten Kurven liefert. Die Ausnahme bilden die Tate-Kato Kurven, die im nächsten Abschnitt studiert werden.

5.6 Uniformisierung log-abelscher Varietäten

In diesem Abschnitt werden die log-abelschen Varietäten mit Hilfe der Uniformisierung in Theorem 5.6.3 konkret beschrieben. Wie in der Differentialgeometrie ist die universelle Überlagerung hierbei durch die logarithmische Exponentialabbildung gegeben.

Konvention. Es sei k ein Körper versehen mit der Standard Log-Struktur

$$\mathcal{M}_k = \pi^{\mathbb{N}} \oplus k^{\times}.$$

Es sei weiterhin \underline{A} eine log-abelsche Varietät über \underline{k} gegeben mit dem strikten Anteil

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0.$$

- Man schreibt $\underline{\mathfrak{A}}$ für das assoziierte valuative Log-Schema $\underline{A}^{\text{val}}$.
- Es seien Λ die Charaktergruppe von T , $\Lambda^{\vee} := \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ und $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} := \Lambda^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
- Der Einfachheit halber nimmt man an, dass der Grundkörper separabel abgeschlossen ist. Die Aussagen in diesem Abschnitt gelten aber auch für einen beliebigen Körper.
- Um die Daten zu komplettieren wählt man eine projektive torische Varietät $T \hookrightarrow P$.
- Man hat dann den Log-Torus $\underline{P}^{\text{val}}$ und das Pushout $\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G$ jeweils über k mit der trivialen Log-Struktur. Via Basiswechsel in der Kategorie valuativer Log-Schemata,

$$(\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G)_{\underline{k}} := (\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G) \otimes_k \underline{k},$$

erhält man eine Log-Gruppe über \underline{k} . Diese enthält eine maximale vertikale Untergruppe

$$\underline{\mathfrak{V}} := [(\underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G)_{\underline{k}}]^{\text{vt}}$$

(Proposition 5.2.10). Grundsätzlich gilt in diesem Abschnitt, dass die nichtvertikalen Log-Schemata über dem Grundkörper k mit der trivalen Log-Struktur definiert sind.

- Für das Folgende fixiert man ein ganzes Modell \underline{V} der Log-Gruppe $\underline{\mathfrak{V}}$.

Man beachte, dass $\text{Pol}(\underline{V})$ auf kanonische Weise mit einer rationalen Polyederzerlegung des Vektorraums $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ identifiziert werden kann. Dies folgt aus Bemerkung 5.2.13.

Bemerkung 5.6.1. Wichtig für das Folgende ist, dass man die Elemente aus dem Gitter $\Lambda \oplus \pi^{\mathbb{Z}}$ wie folgt auf zweierlei Weise interpretieren kann.

1. Als affin lineare Funktionen auf dem Polyederkomplex $\text{Pol}(\underline{V})$.
Man beachte, dass dieser homeomorph ist zu $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$.
2. Als globale Schnitte in $\Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_{\underline{V}}^{\text{gp}}) \subset \Gamma(\underline{\mathfrak{V}}, \overline{\mathcal{M}}_{\underline{\mathfrak{V}}}^{\text{gp}})$.

Man erhält insbesondere einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$\underline{\mathfrak{V}}(\underline{k}) \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee},$$

die einem log-rationalen Punkt $v \in \underline{\mathfrak{V}}(\underline{k})$ das lineare Funktional zuordnet

$$\bar{v} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \lambda(\pi_y).$$

Hierbei ist π_y der Erzeuger des Halms $\overline{\mathcal{M}}_{\underline{\mathfrak{V}}, y} = \pi_y^{\mathbb{N}}$. Man beachte, dass die Charaktere $\lambda \in \Lambda$ auf kanonische Weise globale Schnitte aus $\Gamma(\underline{\mathfrak{V}}, \overline{\mathcal{M}}_{\underline{\mathfrak{V}}}^{\text{gp}})$ definieren.

Definition 5.6.2. Eine strikte Log-Untergruppe $L \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ heißt Gitter, falls sie unter dem Homomorphismus $\mathfrak{Y}(k) \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ injektiv auf ein Gitter abgebildet wird.

Das Theorem über die Uniformisierung log-abelscher Varietäten lautet nun wie folgt:

Theorem 5.6.3. 1. Es existiert ein Homomorphismus von Log-Gruppen über k

$$\exp_A : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{mit} \quad \exp_A|_G = \text{id}_G,$$

der eindeutig durch die Bedingung $\exp_A|_G = \text{id}_G$ bestimmt ist.

2. Der Kern $\Lambda^t := \text{Ker}(\exp_A)$ ist ein Gitter in \mathfrak{Y} von vollem Rang ($= \dim(T)$)

3. Der Homomorphismus \exp_A induziert einen Isomorphismus von Log-Gruppen

$$\mathfrak{Y}/\Lambda^t \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}.$$

Der Beweis dieses Theorems wird fast den gesamten restlichen Abschnitt in Anspruch nehmen. In der folgenden Konvention macht man hierfür Reduktionen:

Konvention. Nach Katos Theorem 4.3.16 kann man für den Beweis von Theorem 5.6.3 beliebige log-fqe Basiswechsel durchführen. Man kann daher annehmen:

1. \mathcal{M}_A hat keine Selbstüberschneidung.
2. \underline{A} über k ist saturiert; vermöge Theorem 3.3.17.
3. $G \hookrightarrow A$ ist stabil semiabelsch; vermöge Korollar 5.3.15.

Man sieht leicht, dass die dritte Bedingung die ersten beiden impliziert.

Die folgende Überlegung ist der erste Grundstein für den Beweis von Theorem 5.6.3:

Es ist G ein offenes Stratum in A . Daher erhält man eine toroidale Einbettung

$$G \hookrightarrow \text{Star}_A(G).$$

Aus den funktoriellen Eigenschaften von $\text{Star}_X(D)$ in Theorem 3.2.10 folgert man, dass die Verknüpfung auf $\underline{A}^{\text{val}}$ eine Log-Gruppenstruktur induziert auf

$$\text{Star}_A(G)^{\text{val}}.$$

Denn es ist $G \times_k G$ ein offenes Stratum in $A \times_k A$ und es gilt kanonisch

$$\text{Star}_{A \times_k A}(G \times_k G) \simeq \text{Star}_A(G) \times_k \text{Star}_A(G).$$

Zusammengefaßt erhält man das einfache aber wichtige Lemma:

Lemma 5.6.4. Es ist $\text{Star}_A(G)$ log-semiabelsch über k versehen mit der trivialen Log-Struktur und somit gilt insbesondere nach Theorem 5.4.2 kanonisch

$$\text{Star}_A(G)^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G.$$

Das folgende Lemma ist der zweite Grundstein für den Beweis von Theorem 5.6.3.

Es folgt aus den funktoriellen Eigenschaften der Exponentialabbildung in Theorem 5.5.7. Es sei daran erinnert, dass $\underline{\mathfrak{A}}, \underline{\mathfrak{B}}$ neben der gewöhnlichen Topologie auch die sehr viel größere CW-Topologie tragen (Definition 5.5.3).

Lemma 5.6.5. 1. Nach Basiswechsel mit der Ku-fqe Erweiterung

$$\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[\epsilon]{\pi}]$$

findet man CW-offene Umgebungen der Nullschnitte

$$\underline{\mathfrak{U}} \subset \underline{\mathfrak{A}}, \quad \underline{\mathfrak{V}} \subset \underline{\mathfrak{B}},$$

so dass ein Isomorphismus valuativer Log-Schemata über \underline{k} existiert

$$\exp : \underline{\mathfrak{V}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathfrak{U}} \quad \text{mit} \quad \exp|_G = \text{id}_G,$$

der ein Keim eines Gruppenhomomorphismus ist, d.h. es gilt:

Für alle fs valuativen Log-Schemata $\underline{\mathfrak{S}}$ über \underline{k} und alle kategorischen Punkte \bar{x}, \bar{y} in $\underline{\mathfrak{U}}(\underline{\mathfrak{S}})/\underline{k}$ mit der Eigenschaft $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \underline{\mathfrak{U}}(\underline{\mathfrak{S}})$ gilt

$$\exp(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \exp(\bar{x}) \cdot \exp(\bar{y}).$$

2. Der Keim \exp ist durch die Bedingung $\exp|_G = \text{id}_G$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu 1.) Die Existenz des Keimes \exp folgt aus Lemma 5.6.4 und Theorem 5.5.7. Man beachte, dass \exp schon nach einer endlichen Erweiterung $\underline{k} \hookrightarrow \underline{k}[\sqrt[\epsilon]{\pi}]$ definiert ist.

Zu 2.) Durch die Bedingung $\exp|_G = \text{id}_G$ ist der induzierte Isomorphismus

$$\text{Star}_V(G)^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \text{Star}_A(G)^{\text{val}}$$

eindeutig bestimmt und somit ist auch der Keim \exp eindeutig bestimmt. \square

Bemerkung 5.6.6. In (Proposition 3.1 in [25]) findet man eine ähnliche Aussage. Der Beweis dieser Aussage unterscheidet sich aber fundamental von dem obigen. Während in loc. cit. das Gruppengesetz in dem Nullpunkt mit Hilfe formaler Potenzreihen untersucht wird, folgt hier das Lemma aus einem funktoriellen Prinzip.

Man betrachtet nun den assoziierten Polyederkomplex $\text{Pol}(\underline{A})$ (Definition 3.4.5). Dessen unterliegender topologischer Raum hängt nur von $\underline{\mathfrak{A}} = \underline{A}^{\text{val}}$ ab.

Definition 5.6.7. Ohne den Leser zu verwirren schreibt man $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ für diesen Raum.

Bemerkung 5.6.8. Es ist sinnvoll $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ als projektiven Limes zu verstehen

$$\varprojlim_{\mathcal{I}} \text{Pol}(\underline{A}_{\mathcal{I}}).$$

Ähnlich wie ein valuativer Fächer (4.1.3) trägt auch $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ eine monoidale Struktur:

Hierfür faßt man $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ auf als eine Teilmenge des valuativen monoidalen Raums

$$F(\underline{\mathfrak{A}}) := F(\underline{A})^{\text{val}}.$$

Man kann dann $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ mit der induzierten Grothendieck-Topologie versehen. Via Pullback unter $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}}) \hookrightarrow F(\underline{\mathfrak{A}})$ erhält man auf $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ eine monoidale Struktur.

Die folgende Proposition liefert eine Beschreibung von $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$. Sie ist zwar nicht notwendig für den Beweis von Theorem 5.6.3, wohl aber hilfreich für das Verständnis.

Proposition 5.6.9. 1. *Es trägt $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ eine kanonische Struktur als Lie-Gruppe.*

2. *Diese ist kompakt, zusammenhängend und kommutativ.*

3. *Die Lie-Algebra von $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ ist kanonisch isomorph zu dem Vektorraum $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$.*

Somit existiert ein Gitter von vollem Rang $\Lambda^t \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$, so dass gilt

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} / \Lambda^t \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}}).$$

Bemerkung 5.6.10. Für die Log-Gruppe $\underline{\mathfrak{A}}$ gelten ähnliche Aussagen:

Der Raum $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ ist eine Lie-Gruppe und als solche kanonisch isomorph zu $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$.

Insbesondere steht die obige Proposition in Einklang mit Theorem 5.6.3.

Beweis. Zu 1.) Nach Proposition 2.4.14 hat man eine strikte Abbildung von Fächern

$$F(\underline{A}') \rightarrow F(\underline{A}) \times_{\mathbb{N}}^{\text{fs}} F(\underline{A}) \quad \text{mit} \quad \underline{A}' = \underline{A} \times_k^{\text{fs}} \underline{A}. \quad (5.6)$$

Man zeigt zuerst, dass diese Abbildung ein Isomorphismus von Fächern ist:

Hierfür bemerkt man zuerst, dass die kanonischen Strata von A' die Faserprodukte

$$D_i \times_k D_j$$

sind mit D_i den Strata von A . Aus der Beschreibung der Stratifizierung in Theorem 3.2.10 erhält man, dass die Abbildung (5.6) ein Isomorphismus ist.

Durch Übergang zu den Polyederkomplexen erhält man einen Isomorphismus

$$\text{Pol}(\underline{A}') \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\underline{A}) \times \text{Pol}(\underline{A}).$$

Aus der Funktorialität von $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ erhält man, dass $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ via der Log-Gruppenstruktur auf $\underline{\mathfrak{A}}$ auf kanonische Weise eine topologische Gruppe ist.

Die Lie-Gruppen Struktur erhält man wie folgt: Nach Lemma 5.6.4 gilt kanonisch

$$\text{Star}_A(G)^{\text{val}} \xrightarrow{\sim} \underline{P}^{\text{val}} \oplus_T G.$$

Nach Theorem 3.2.10 ist $F(\text{Star}_A(G))$ kanonisch isomorph zu $\text{Star}_{F(\underline{A})}(g)$, wobei g der Punkt in $F(\underline{A})$ zu dem Stratum G ist. Die Elemente in der Charaktergruppe Λ liefern in einer offenen Umgebung des Nullpunktes kanonische glatte Koordinaten (siehe 3.2.3). Nach Konstruktion ist die Multiplikation in dem Nullpunkt glatt. Via Translation haben die glatten Koordinaten daher eine eindeutige Ausdehnung auf $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$.

Zu 2.) Aus trivialen Gründen ist $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ kompakt und zusammenhängend. Ferner erhält man aus Korollar 5.3.10, dass $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ eine kommutative Gruppe ist.

Die Aussage über die Lie-Algebra von $\text{Pol}(\underline{\mathfrak{A}})$ in 3.) folgt aus der Konstruktion. \square

Der Beweis von Theorem 5.6.3.

Zunächst sei bemerkt, dass die Log-Gruppe $\underline{\mathcal{A}}$ von einer beliebigen CW-offenen Teilmenge $\underline{\mathcal{U}}$ erzeugt wird. Man beachte hierfür, dass $\underline{\mathcal{U}}$ einer offenen Teilmenge in der Lie-Gruppe $\text{Pol}(\underline{\mathcal{A}})$ entspricht. Dasselbe gilt für die Log-Gruppe $\underline{\mathcal{V}}$.

Zur Eindeutigkeit: Eine Abbildung $\exp_A : \underline{\mathcal{V}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ mit der Eigenschaft

$$\exp_A|_G = \text{id}_G$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Weiterhin ist ihr Keim nach Lemma 5.6.5 eindeutig bestimmt. Somit ist auch die Abbildung \exp_A eindeutig bestimmt.

Zur Existenz: Hierfür reicht es zu zeigen, dass jede 1-Parameter Untergruppe

$$\bar{p} : \mathbb{G}_{m,k} \hookrightarrow G \hookrightarrow \underline{\mathcal{A}}$$

eine Ausdehnung zu einem Homomorphismus von k -Log-Gruppen hat

$$p : (\mathbb{P}_k^1)^{\text{vt}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}.$$

Die Konstruktion der Ausdehnung mit Hilfe des Keims in Lemma 5.6.5 ist trivial.

Zu den Eigenschaften: - Die Surjektivität der Abbildung \exp_A ist trivial.

- Dass die Abbildung \exp_A strikt étale ist, überprüft man auf dem Keim.

- Die Aussagen über den Kern des Homomorphismus \exp_A sind trivial.

Damit ist das Uniformisierungstheorem 5.6.3 vollständig bewiesen. \square

Beispiel 5.6.11. Es sei \underline{E} eine log-abelsche k -Varietät, die eindimensional ist. Letzteres bedeutet, dass der strikte Anteil G eine eindimensionale semiabelsche Varietät ist, d.h. G ist entweder eine elliptische Kurve oder ein Torus.

Im ersten Fall stimmt $\underline{E}^{\text{val}}$ mit seiner universellen Überlagerung überein, so dass das Uniformisierungstheorem trivial ist. Im zweiten Fall nimmt man an, dass der Torus zerfällt. Dann ist \underline{E} eine Tate-Kato Kurve wie in Beispiel 5.3.7. Die universelle Überlagerung von $\underline{E}^{\text{val}}$ ist der vertikale Teil von \mathbb{P}_k^1 . Das Periodengitter Λ^t ist enthalten in

$$\mathbb{P}_k^1(k) \simeq \pi^{\mathbb{Z}} \oplus k^{\times},$$

hat den Rang 1 und wird erzeugt von einem kanonischen Element

$$\lambda \in \pi^{\mathbb{N}^+} \oplus k^{\times}.$$

Das Uniformisierungstheorem 5.6.3 liefert in dieser Situation einen Isomorphismus

$$(\mathbb{P}_k^1)^{\text{vt}} / \lambda^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \underline{E}^{\text{val}}.$$

In der rigiden Geometrie ist die Uniformisierung einer Tate elliptischen Kurve E über einem vollständigen diskret bewerteten Körper K ganz ähnlich. Es existiert ein Element in $\lambda \in \mathbb{G}_{m,K}(K)$, so dass die rigid-analytische Kurve E^{rig} isomorph ist zu

$$\mathbb{G}_{m,K}^{\text{rig}} / \lambda^{\mathbb{Z}}.$$

Man erhält aus dem Uniformisierungstheorem 5.6.3 das folgende Korollar:

Korollar 5.6.12. *Es besitzt $\underline{\mathfrak{A}}$ ein über \underline{k} saturiertes ganzes Modell.*

Beweis. Die ganzen Modelle von $\underline{\mathfrak{A}}$ entsprechen rationalen Polyederzerlegungen Σ des Vektorraums $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$. Man konstruiert eine rationale Polyederzerlegung Σ , die invariant ist unter Translation mit den Perioden in Λ^t und so dass die Ecken in Λ^{\vee} enthalten sind.

Dann kann man in der Kategorie der fs Log-Schemata den Quotienten bilden

$$\underline{V}_{\Sigma}/\Lambda^t.$$

Nach Proposition 3.3.2 ist dieser ein saturiertes fs Log-Schema über \underline{k} . □

Bemerkung 5.6.13. Ist $\underline{\mathfrak{A}}$ log-abelsche Varietät, so ist es im allgemeinen nicht möglich ein saturiertes ganzes Modell $\underline{V}_{\Sigma}/\Lambda^t$ zu finden, für das gilt:

- Die Log-Struktur hat keine Selbstüberschneidung.

Das einfachste Gegenbeispiel hierfür ist eine Tate-Kato Kurve der Form

$$(\mathbb{P}_{\underline{k}}^1)^{\text{vt}}/\pi^{\mathbb{Z}},$$

wobei π ein Parameter von \underline{k} ist.

- Der Quotient V_{Σ}/Λ^t ist ein projektives k -Schema.

Letzteres Problem wird im nächsten Abschnitt behandelt.

5.7 Polarisierungen log-abelscher Varietäten

Im diesem Abschnitt wird die Frage behandelt, unter welchen Bedingungen eine log-abelsche Varietät projektiv ist, d.h. ein projektives ganzes Modell besitzt.

Es wird sich herausstellen, dass wie in der klassischen komplexen Geometrie eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die Existenz einer *Polarisierung* ist.

Konvention. *Es seien in diesem Abschnitt \underline{k} ein separabel abgeschlossener Log-Körper mit der Standard Log-Struktur $k^{\times} \oplus \pi^{\mathbb{N}}$ und $\underline{\mathfrak{A}}$ eine log-abelsche \underline{k} -Varietät.*

Man nimmt in diesem Abschnitt an, dass der strikte Anteil von $\underline{\mathfrak{A}}$ ein Torus T ist, d.h. man hat den total degenerierten Fall.

Die obigen Daten komplettiert man wie folgt.

- Es seien Λ die Charaktergruppe von T , $\Lambda^{\vee} := \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ und $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

- Man benutzt intensiv das Uniformisierungstheorem 5.6.3:

Es seien $\text{exp}_0 : \underline{\mathfrak{A}} \rightarrow \underline{\mathfrak{A}}$ die universelle Überlagerung und $\Lambda^t := \text{Ker}(\text{exp}_0)$ die Perioden.

- Man fixiert eine rationale Polyederzerlegung Σ von $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$, die invariant ist unter Λ^t .

- Es induziert Σ ein Λ^t -equivariantes ganzes Modell \underline{V} von $\underline{\mathfrak{A}}$ mit

$$\text{Pol}(\underline{V}) = \Sigma.$$

- Der Quotient $\underline{A} := \underline{V}/\Lambda^t$ existiert und ist ein fs ganzes Modell von $\underline{\mathcal{A}}$.
- Es seien Z_j die irreduziblen Komponenten von V . Dann sind die Abschlüsse der Strata

$$\text{Star}_V(D) = D^{\text{cls}}$$

alle nichtleeren Schnitte $Z_{j_1} \cap \dots \cap Z_{j_n}$, denn diese sind zusammenhängend.

Man beachte weiterhin, dass $D, \text{Star}_V(D)$ isomorph ist zu einem Quotienten T' des Torus T bzw. zu einer eigentlichen torischen k -Varietät $T' \hookrightarrow P$.

Unmittelbar aus den Definitionen erhält man:

Proposition 5.7.1. Die log-abelsche Varietät $\underline{\mathcal{A}}$ ist bestimmt durch eine Paarung

$$b : \Lambda^t \times \Lambda \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}},$$

die eine nichtausgeartete Bilinearform induziert

$$\bar{b} : \Lambda^t \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_k^{\text{gp}} = \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 5.7.2. Als eine einfache aber wichtige Konsequenz aus obiger Proposition erhält man die Existenz der dualen log-abelschen Varietät

$$\underline{\mathcal{A}}^t := \text{Hom}_k(\Lambda^t, \mathcal{M}^{\text{gp}})/\Lambda.$$

Die log-rationalen Punkte von $\underline{\mathcal{A}}^t$ entsprechen algebraisch trivialen \mathcal{M}^{gp} -Torsoren auf $\underline{\mathcal{A}}$. In Theorem 5.7.7 wird eine Aussage in diese Richtung bewiesen.

Bemerkung 5.7.3. - Für die globalen Schnitte von $\mathcal{M}_V^{\text{gp}}$ gilt

$$\Gamma(V, \mathcal{M}_V^{\text{gp}}) = \Lambda \oplus \mathcal{M}_k^{\text{gp}} = \Lambda \oplus \pi^{\mathbb{Z}} \oplus k^\times.$$

- Für globale Schnitte von $\overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}}$ hat man folgende Interpretationen:

1. Als invertierbare Bruchideale von \mathcal{M}_V .
2. Als stückweise lineare Funktionen auf $f : \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jeder Zelle von $\text{Pol}(\underline{V})$ linear und die auf den Gitterpunkten in $\Lambda^{\vee} \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ ganz sind.

- Via Pushout kann man einem \mathbb{G}_m -Torsor \mathcal{G} ein \mathcal{M} -Bündel $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_V^\times} \mathcal{M}_V$ zuordnen. Man hat eine kanonische Abbildung in das induzierte Geradenbündel

$$\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_V^\times} \mathcal{M}_V \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_V^\times} \mathcal{O}_V$$

Ganz ähnlich wie für torische Varietäten in 5.2.4 definiert man nun:

Definition 5.7.4. Ein globaler Schnitt $f \in \Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}})$ heißt streng konvex, wenn die zugehörige stückweise lineare Funktion $f : \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex ist und letztere die rationale Polyederzerlegung $\text{Pol}(\underline{V})$ von dem Vektorraum $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$ induziert.

Die folgenden Aussagen sind in Analogie zu Proposition 5.4.14 zu sehen.

Proposition 5.7.5. 1. Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}}) / (\pi^{\mathbb{N}} \oplus \Lambda) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V), \quad f \mapsto \mathcal{L}_f.$$

2. Die amplen invertierbaren Garben auf dem k -Schema V entsprechen hierbei den streng konvexen Schnitten in $\Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}})$.

Beweis. Zu 1.) Durch Auswertung der kanonischen kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_V^\times \rightarrow \mathcal{M}_V^{\text{gp}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}} \rightarrow 1$$

mit dem globale Schnitte Funktor erhält man eine injektive Abbildung

$$\Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}}) / (\pi^{\mathbb{N}} \oplus \Lambda) \hookrightarrow \text{Pic}(V), \quad f \mapsto \mathcal{L}_f.$$

Für den Beweis der Surjektivität dieser Abbildung kann man wegen Katos Theorem 3.3.16 Ku-fqe-Basiswechsel durchführen. Nach Theorem 3.3.17 kann man annehmen, dass \underline{V} über \underline{k} saturiert ist. Nach Proposition 3.3.7 ist V dann insbesondere reduziert.

Es sei nun eine invertierbare Garbe \mathcal{L} auf dem Schema V gegeben. Man betrachtet die Einschränkungen von \mathcal{L} auf die irreduziblen Komponenten. Die irreduziblen Komponenten Z_j sind isomorph zu projektiven torischen Varietäten. Versieht man diese mit den kanonischen Log-Strukturen, so gilt nach Proposition 5.4.14 kanonisch

$$\text{Pic}(Z_j) \simeq \Gamma(Z_j, \overline{\mathcal{M}}_{Z_j}^{\text{gp}}) / \Lambda.$$

Die Ecken $\nu_j \in \text{Pol}(\underline{V})$ entsprechen eindeutig den irreduziblen Komponenten $Z_j \subset V$. Man definiert $\text{Star}(\nu_j)$ als die Vereinigung aller Zellen $\sigma \subset \text{Pol}(\underline{V})$ mit $\nu_j \in \sigma$. Man kann $\Gamma(Z_j, \overline{\mathcal{M}}_{Z_j}^{\text{gp}})$ mit stückweise linearen Funktionen auf $\text{Star}(\nu_j)$ identifizieren, die in ν_j verschwinden, auf Zellen linear und auf Gitterpunkten in $\Lambda^\vee \cap \text{Star}(\nu_j)$ ganz sind.

Es seien f_j die Funktionen auf $\text{Star}(\nu_j)$, welche die Einschränkungen $\mathcal{L}|_{Z_j}$ induzieren. Man sieht leicht, dass eine stückweise lineare Funktion $f : \Lambda_{\mathbb{R}}^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$f|_{\text{Star}(\nu_j)} \equiv f_j \pmod{\Lambda \oplus \pi^{\mathbb{Z}}}.$$

Dann induziert f eine invertierbare Garbe \mathcal{L}_f auf V mit $\mathcal{L}_f|_{Z_j} \simeq \mathcal{L}|_{Z_j}$. Weil $\text{Pol}(\underline{V}) = \Lambda_{\mathbb{R}}^\vee$ kontrahierbar ist, folgt aus Proposition 3.5.4, dass \mathcal{L}_f isomorph ist zu \mathcal{L} .

Zu 2.) Zunächst sei bemerkt, dass strenge Konvexität nur von $f \pmod{\Lambda \oplus \pi^{\mathbb{Z}}}$ abhängt.

Es seien nun $f \in \Gamma(V, \overline{\mathcal{M}}_V^{\text{gp}})$ streng konvex und \mathcal{L}_f die induzierte invertierbare Garbe. Eine abgeschlossene Zelle $\sigma \subset \text{Pol}(\underline{V})$ induziert eine affine offene Teilmenge

$$\underline{V} \times_{\text{Pol}(\underline{V})} \sigma$$

und über dieser ist \mathcal{L}_f trivial. Die Elemente in $g \in \pi^{\mathbb{Z}} \oplus \Lambda$ mit $g \geq f$ liefern globale Schnitte s_g von \mathcal{L}_f . Hierfür interpretiert man \mathcal{L}_f als invertierbares \mathcal{M}_V -Bruchideal (siehe Bemerkung 5.7.3). Wegen der strengen Konvexität von f existiert ein g mit $f|_\sigma = g|_\sigma$ und $g > f$ sonst. Dann verschwindet der induzierte Schnitt s_g überall, nur nicht auf $\underline{V} \times_{\text{Pol}(\underline{V})} \sigma$. Hieraus erhält man, dass die invertierbare Garbe \mathcal{L}_f ample ist.

Sei nun umgekehrt \mathcal{L}_f ample. In der Notation von 1.) haben die Funktionen

$$f_j : \text{Star}(\nu_j) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch Linearität eine Ausdehnung auf $\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$. Hierbei macht man die Identifikation

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} = \text{Tangentialraum von } \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} \text{ in } \nu_j.$$

Die Einschränkungen $\mathcal{L}|_{Z_j}$ sind ample invertierbare Garbe auf Z_j und somit sind die Funktionen f_j nach 5.2.4 streng konvex. Folglich ist auch f streng konvex. \square

Man betrachte die folgende Situation:

- Es sei \mathcal{L} ein rigidifizierter \mathbb{G}_m -Torsor auf dem Schema A .
- Weiterhin sei $\underline{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{G}_m} \mathcal{M}^{\text{gp}}$ der induzierte Zariski \mathcal{M}^{gp} -Torsor auf A .
- Und es sei $\tilde{\underline{\mathcal{L}}} := \Phi^* \underline{\mathcal{L}}$ das Pullback unter $\Phi : V \rightarrow V/\Lambda^t = A$.

In dieser Situation kann man nun $\underline{\mathcal{L}}$ wie folgt beschreiben:

Proposition 5.7.6. 1. Es ist $\tilde{\underline{\mathcal{L}}}$ ein trivialer \mathcal{M}^{gp} -Torsor auf V .

2. Wählt man eine beliebige Trivialisierung $\tilde{\underline{\mathcal{L}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_V^{\text{gp}}$, die mit der Rigidifizierung kompatibel ist, so hat die induzierte Λ^t -Linearisierung von $\mathcal{M}_V^{\text{gp}}$ die Form:

$$f(v) \mapsto [a(y) \cdot \varphi(y)] \cdot f(y.v), \quad y \in \Lambda^t, \quad v \in V,$$

wobei f ein lokaler Schnitt von $\underline{\mathcal{L}}$ ist.

Hierbei haben φ, a die folgenden Eigenschaften:

- $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- $a : \Lambda^t \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}}$ ist eine nomierte Funktion, d.h. es gilt $a(0) = 1$, die quadratisch ist bzgl. der induzierten Paarung $b(\cdot, \varphi(\cdot))$ (Proposition 5.7.1):

$$b(y_1, \varphi(y_2)) = a(y_1 + y_2) \cdot a(y_1)^{-1} \cdot a(y_2)^{-1}, \quad y_1, y_2 \in \Lambda^t.$$

3. Ist \mathcal{L} ample, so ist die induzierte Bilinearform positiv definit

$$\bar{b}(\cdot, \varphi(\cdot)) : \Lambda^t \times \Lambda^t \rightarrow \mathbb{Z}.$$

4. Es ist $\underline{\mathcal{L}}$ genau dann trivial, wenn a induziert ist durch einen Charakter in Λ .

Beweis.

Die erste Aussage folgt aus Proposition 5.7.5.

Zu 2.) Die Hochschild-Serre Spektralsequenz bzgl. der Galois-Überlagerung

$$\Phi : V \rightarrow A$$

und der Garbe $\mathcal{M}_V^{\text{gp}}$ induziert eine exakte Sequenz der Kohomologiegruppen

$$1 \rightarrow H^1(\Lambda^t, \Gamma(V, \mathcal{M}_V^{\text{gp}})) \rightarrow H^1(A, \mathcal{M}^{\text{gp}}) \rightarrow \Gamma(A, R^1 \Phi_* \mathcal{M}_V^{\text{gp}})$$

(Theorem 2.20 in [28]), wobei links die Gruppenkohomologie steht.

Für die globalen Schnitte gilt $\Gamma(V, \mathcal{M}_V^{\text{gp}}) = \Lambda \oplus \mathcal{M}_k^{\text{gp}}$. Somit existieren Abbildungen

$$\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda, \quad a : \Lambda^t \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}},$$

so dass $\underline{\mathcal{L}}$ durch den 1-Kozykel dargestellt wird:

$$\chi_{\mathcal{L}} : \Lambda^t \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{M}_V^{\text{gp}}), \quad y \mapsto a(y) \cdot \varphi(y)$$

Hierbei sind alle 1-Kozykel inhomogen. Die Notation sei wie in (§3 in [38], Kap VII).

Die Abbildung $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Denn φ ist ein 1-Kozykel in $H^1(\Lambda^t, \Lambda)$, wobei Λ mit der trivialen Λ^t -Operation versehen ist.

Der Kozykel $\chi_{\mathcal{L}}$ induziert eine Funktion $\Lambda^t \times \Lambda^t$. Diese hat eine Darstellung

$$\chi_{\mathcal{L}}(y', y) = a(y) \cdot b(y', \varphi(y)), \quad y, y' \in \Lambda^t.$$

Die Kozykelbedingung für $\chi_{\mathcal{L}}$ liefert die Gleichung

$$\chi_{\mathcal{L}}(y', y_1 + y_2) = a(y_2) \cdot b(y' + y_1, \varphi(y_2)) \cdot a(y_1) \cdot b(y', \varphi(y_1)).$$

Weiterhin hat man trivialerweise die Gleichung

$$\chi_{\mathcal{L}}(y', y_1 + y_2) = a(y_1 + y_2) \cdot b(y', \varphi(y_1) + \varphi(y_2)),$$

weil φ ein Homomorphismus ist. Somit erhält man in 1.) die gewünschte Gleichung. Weil die Trivialisierung mit der Rigidifizierung verträglich ist, gilt $a(0) = 1$.

Zu 3.) Nach 2.) ist die induzierte Funktion $\bar{a} : \Lambda^t \rightarrow \mathbb{Z}$ quadratisch mit assoziierter Bilinearform $\bar{b}(\cdot, \varphi(\cdot))$. Die Bilinearform ist insbesondere symmetrisch.

In der Notation von Proposition 5.7.5 sei $f : \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise lineare Funktion, so dass das Pullback $\Phi^* \mathcal{L}$ isomorph ist zu \mathcal{L}_f . Man nimmt an, dass $f(0) = 0$ ist.

Man sieht, dass die Funktionen \bar{a} und $-f|_{\Lambda^t}$ bis auf ein Element in Λ übereinstimmen:

$$\bar{a} \equiv -f|_{\Lambda^t} \pmod{\Lambda}. \quad (5.7)$$

Man beachte die kanonischen Inklusionen $\Lambda^t \subset \Lambda^{\vee} \subset \Lambda_{\mathbb{R}}^{\vee}$. Die Behauptung erhält man nun aus Proposition 5.7.5. Denn hiernach ist f streng konvex und somit folgt aus Gleichung (5.7), dass die Bilinearform $\bar{b}(\cdot, \varphi(\cdot))$ positiv definit ist.

Die letzte Aussage ist mehr oder weniger trivial. □

Man erhält hieraus das folgende wichtige Theorem:

Theorem 5.7.7. *Es ist $H^1(\mathfrak{A}, \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}^{\text{gp}})$ kanonisch isomorph zu der Menge aller Paare (a, φ) (mit den offensichtlichen Gruppenoperationen), welche bestehen aus*

- einem Homomorphismus $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$

- und einer quadratischer Funktionen $a : \Lambda^t \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}}$ (wie in Proposition 5.7.6)

modulo der Charaktergruppe Λ ; deren Elemente $\lambda \in \Lambda$ liefern Paare $a = \lambda, \varphi = 0$.

Beweis. Man sieht zuerst, dass die Garbe $\overline{\mathcal{M}}_{\mathfrak{A}}^{\text{gp}}$ weik ist. Dies folgt aus Korollar 4.2.11 und den Propositionen 3.5.6, 2.5.13. Daher hat man eine Surjektion

$$H^1(\mathfrak{A}, \mathcal{O}_{\mathfrak{A}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{A}, \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}^{\text{gp}}).$$

Weiterhin ist $H^1(\mathfrak{A}, \mathcal{O}_{\mathfrak{A}}^{\times})$ kanonisch isomorph zu dem direkten Limes

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} H^1(A_{\mathcal{I}}, \mathcal{O}_{A_{\mathcal{I}}}^{\times})$$

über alle Log-Aufblasungen $\underline{A}_{\mathcal{I}} \rightarrow \underline{A}$. Dies folgt wiederum aus Korollar 4.2.11.

Nach Proposition 5.7.6 hat man daher eine Inklusion von $H^1(\mathfrak{A}, \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}^{\text{gp}})$ in den Raum aller quadratischer Funktionen $a : \Lambda^t \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}}$ wie in der Behauptung.

Dass diese Inklusion surjektiv ist, ist mehr oder weniger trivial. \square

Bemerkung 5.7.8. Das Theorem steht in Einklang mit bekannten Resultaten über die Uniformisierung polarisierter abelscher Varietäten:

- 1.) In der komplexen Analysis ist das *Theorem von Appell-Humbert* das Analogon [30].
- 2.) In der formellen algebraischen Geometrie ist das *Theorem von Faltings-Chai über die Degeneration abelscher Varietäten* (Theorem 4.1 in [9], Kapitel II) das Analogon.
- 3.) Der rigid analytische Spezialfall von 2.) (Lemma 2.3 in [4]).

Der genaue Zusammenhang zwischen den polarisierten log-abelschen Varietäten und der Theorie von Faltings und Chai wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Die folgende Definition drängt sich förmlich auf:

Definition 5.7.9. 1. Eine Polarisierung von \mathfrak{A} ist ein Homomorphismus $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$, so dass die Paarung $b(\cdot, \varphi(\cdot))$ symmetrisch und positiv definit ist:

$$\begin{aligned} b(y, \varphi(y')) &= b(y', \varphi(y)) \quad \text{für alle } y, y' \in \Lambda^t \\ \bar{b}(y, \varphi(y)) &> 0 \quad \text{für alle } y \in \Lambda^t - 0 \end{aligned}$$

2. Eine Polarisierung $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$ heißt *prinzipal*, wenn φ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 5.7.10. Mumford betrachtet in [31] eine ganz ähnliche Situation:

Es sei T ein zerfallender Torus über einem vollständigen normalen Ring (R, I) mit Charaktergruppe Λ . Weiterhin sei ein Gitter Λ^t gegeben mit einem Homomorphismus

$$\Lambda^t \hookrightarrow T(K),$$

wobei K der Quotientenkörper von R ist. Mumford definiert eine Polarisierung als einen Homomorphismus $\varphi : \Lambda^t \rightarrow \Lambda$, so dass die induzierte multiplikative Paarung

$$\Lambda^t \times \Lambda^t \rightarrow K^{\times}, \quad (y', y) \mapsto b(y, \varphi(y'))$$

symmetrisch und positiv definit ist, d.h. es gilt für alle $y, y' \in \Lambda^t - 0$

$$b(y, \varphi(y')) = b(y', \varphi(y)) \quad \text{und} \quad b(y, \varphi(y)) \in I.$$

Theorem 5.7.11. *Eine total degenerierende log-abelsche Varietät ist genau dann projektiv, d.h. sie hat ein projektives ganzes Modell, wenn sie eine Polarisierung besitzt.*

Beweis. Nach Proposition 5.7.6 induziert eine ample invertierbare Garbe eine Polarisierung. Die andere Richtung folgt aus der universellen Beschreibung in Theorem 5.8.1. Man beachte, dass Polarisierungen höheren Grades ähnlich zu behandeln sind. \square

Als das Hauptresultat dieser Arbeit erhält man hieraus:

Theorem 5.7.12. *Eine total degenerierende, log-abelsche Varietät ist genau dann eine toroidale Degeneration einer abelschen Varietät, wenn sie projektiv ist.*

Beweis. Dies folgt aus Theorem 5.7.11 und der universellen Beschreibung in Theorem 5.8.1. \square

5.8 Zusammenhang mit der Faltings-Chai Kompaktifizierung von \mathbf{A}_g

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang mit der *toroidalen Kompaktifizierung des Modulstacks der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten von Faltings und Chai* besprochen werden [9]. Hierfür muß man etwas ausholen.

Es sei daran erinnert, dass eine prinzipale Polarisierung einer abelschen Varietät A über einem separabel abgeschlossenen Körper ein Isomorphismus in das Dual ist

$$A \rightarrow A^t, x \mapsto T_x^* \mathcal{L}$$

mit \mathcal{L} einer amplen invertierbaren Garbe auf A und $T_x : A \rightarrow A$ der Translation.

Es bezeichne \mathbf{A}_g den Modul-Stack, der alle prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g parametrisiert. Es ist \mathbf{A}_g ein glatter Deligne-Mumford Stack über \mathbb{Z} . Über \mathbf{A}_g ist die universelle prinzipal polarisierte abelsche Varietät \mathbf{X}_g definiert.

Faltings und Chai konstruieren nun wie folgt Kompaktifizierungen von \mathbf{A}_g :

Für ihre komplizierte Konstruktion betrachten Faltings und Chai den Kegel

$$C \subset \{A \in \mathbb{R}^{g \times g}; A^t = A\}$$

aller positiv semidefiniten quadratischen Formen auf \mathbb{R}^g mit einem rationalen Radikal. Sie wählen eine rationale Polyederkegelzerlegung Σ von C , die equivariant ist unter der kanonischen Operation von $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}^g)$. In Abhängigkeit von Σ konstruieren Faltings und Chai in (Kapitel IV in [9]) eine projektive toroidale Kompaktifizierung

$$\mathbf{A}_g \hookrightarrow \overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}.$$

Hierbei heißt *toroidal*, dass $\overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}$ versehen mit der kanonischen Log-Struktur

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}_g}^\times \cap \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}}$$

log-glatt ist über \mathbb{Z} mit der trivialen Log-Struktur. Man beachte, dass Faltings und Chai nicht die Terminologie der logarithmischen Geometrie benutzen.

Weiterhin betrachten Faltings und Chai den Kegel $\tilde{C} := \mathbb{R}^g \times C$ und sie wählen eine rationale Polyederkegelzerlegung $\tilde{\Sigma}$ von \tilde{C} , die mit Σ kompatibel ist. In Abhängigkeit von $\tilde{\Sigma}$ konstruieren sie in (Kapitel VI in [9]) eine projektive toroidale Kompaktifizierung

$$\mathbf{X}_g \hookrightarrow \overline{\mathbf{X}}_{g,\tilde{\Sigma}}.$$

Versieht man $\overline{\mathbf{X}}_{g,\tilde{\Sigma}}$ mit der mit der kanonischen Log-Struktur $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_g}^\times \cap \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}_{g,\tilde{\Sigma}}}$, so ist die induzierte Abbildung von Log-Stacks log-glatt und vertikal:

$$\overline{\mathbf{X}}_{g,\tilde{\Sigma}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}.$$

Eine projektive rationale Unterteilung von Σ induziert eine Log-Aufblasung von \mathbf{A}_Σ . Daher schreibt man für die *assoziierten valuativen Log-Stacks*

$$\overline{\mathfrak{A}}_g := (\overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma})^{\text{val}}, \quad \overline{\mathfrak{X}}_g := (\overline{\mathbf{X}}_{g,\tilde{\Sigma}})^{\text{val}}$$

Eine genaue Analyse der Konstruktion in (Kapitel VI in [9]) zeigt, dass die Gruppenstruktur auf $\mathbf{X}_g \rightarrow \mathbf{A}_g$ eine Fortsetzung hat zu einer Log-Gruppenstruktur auf

$$\overline{\mathfrak{X}}_g \longrightarrow \overline{\mathfrak{A}}_g.$$

Zusammengefaßt erhält man, dass $\overline{\mathfrak{X}}_g$ ein log-abelsches Schema über $\overline{\mathfrak{A}}_g$ ist.

Weiterhin trägt $\overline{\mathfrak{X}}_g$ eine kanonische *prinzipale Polarisierung*. Diese Stelle bleibt etwas unpräzise. Eine Erläuterung wird der Beweis des folgenden Theorems liefern.

Wie erwartet hat man nun das folgende Theorem:

Theorem 5.8.1. *Die geometrischen Punkte von $\overline{\mathfrak{A}}_g$ über den nulldimensionalen Spitzen entsprechen den prinzipal polarisierten total degenerierenden log-abelsche Varietäten.*

Beweis. Eine prinzipal polarisierte total degenerierende log-abelsche Varietät \mathfrak{A} über einem Körper k mit der Standard Log-Struktur $\pi^{\mathbb{N}} \oplus k^\times$ entspricht einem Tupel

$$(\Lambda, \Lambda^t, b, \varphi).$$

Man fixiert für den Beweis einen beliebigen Isomorphismus $\Lambda^t \simeq \mathbb{Z}^g$. Insbesondere hat man dann eine kanonische symmetrische positiv definite Paarung

$$b(\cdot, \varphi(\cdot)) : \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}}.$$

Die induzierte quadratische Form $\bar{b}(\cdot, \varphi(\cdot))$ entspricht einem Punkt b im Inneren von C . Es sei σ die Zelle von Σ , die diesen Punkt b enthält.

Man betrachtet die kanonische Stratifizierung von $\overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}$. Die Strata entsprechen den Zellen in Σ modulo der $\text{GL}(\mathbb{Z}^g)$ -Operation. Es sei $\overline{\mathbf{A}}_{g,\sigma}$ das Stratum zu der Zelle σ .

Nach (Theorem 5.7 in [9]) ist die formelle Komplettierung entlang $\overline{\mathbf{A}}_{g,\sigma}$ isomorph zu

$$[\text{Specf}(\mathbb{Z}[M_\sigma]^\wedge)/\Gamma_\sigma].$$

Hierbei sind im Einzelnen: M_σ ist der duale Monoid zu σ in $S^2(\mathbb{Z}^g)$, Γ_σ der Stabilisator von dem Polyederkegel $\sigma \subset \mathbb{R}^{g \times g}$ in $GL(\mathbb{Z}^g)$ und die Kompletierung des Rings $\mathbb{Z}[M_\sigma]$ wird bzgl. des von M_σ^+ erzeugten Ideals gebildet.

Die induzierte formelle Log-Struktur ist nach (Theorem 5.7 in [9]) assoziiert zu

$$M_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}[M_\sigma]^\wedge.$$

Die quadratische Form $b(\cdot, \varphi(\cdot))$ induziert einen Homomorphismus

$$M_\sigma \rightarrow \mathcal{M}_k^{\text{gp}}.$$

Versieht man das Stratum $\overline{\mathbf{A}}_{g,\sigma}$ mit der Pullback Log-Struktur unter der kanonischen Inklusion $\overline{\mathbf{A}}_{g,\sigma} \hookrightarrow \overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}$, so induziert $b(\cdot, \varphi(\cdot))$ einen kanonischen Morphismus

$$\text{Spec}(k) \hookrightarrow \overline{\mathbf{A}}_{g,\Sigma}.$$

Dass das Pulback von $\overline{\mathbf{X}}_g$ isomorph ist zu $\underline{\mathbf{X}}$ folgt aus der Konstruktion von $\overline{\mathbf{X}}_g$ in (Kapitel VI in [9]). Dass man hierdurch eine eindeutige Korrespondenz erhält, ist klar. \square

Anhang A

Étale Gruppoide und Topoi

In diesem Anhang wird an einige mehr oder wenige wohlbekannte Fakten über étale topologische Gruppoide und ihre zugehörigen Topoi erinnert.

Konvention. Für die gesamte Arbeit wählt man ein Universum, das so groß ist, dass keine mengentheoretischen Probleme auftauchen (Kapitel 0 in [47], Exposé I).

A.0.2. - Ein Gruppoid T ist eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind. Man kann einen Gruppoid T mit Hilfe der Strukturabbildungen beschreiben

$$s, t : T_1 \rightrightarrows T_0, \quad \mu : T_1 \times_{s,t} T_1 \rightarrow T_1.$$

Hierbei sind T_0, T_1 die Objekt- bzw. Isomorphismenmenge, s die Quellabbildung, t die Zielabbildung und μ die Kompositionsabbildung.

- Ein Gruppoid T heißt (*topologisch*) *étale*, wenn die T_i topologische Räume und s, t stetig und étale sind, also lokale Homeomorphismen sind.

- Ein étaler Gruppoid T heißt quasikompakt, wenn der topologische Raum

$$|T| = T_0 / \sim$$

quasikompakt ist. Hierbei definiert man $x_0 \sim x'_0$, wenn für ein $x_1 \in T_1$ gilt

$$s(x_1) = x_0, \quad t(x_1) = x'_0.$$

A.0.3. - Einen Funktor étaler Gruppoide $f : S \rightarrow T$ kann man beschreiben durch Abbildungen der unterliegenden Objekt- und Isomorphismenräume $f_i : S_i \rightarrow T_i$ für $i = 0, 1$. Ein Funktor heißt stetig, wenn die Abbildungen f_i stetig sind.

- Zusammen mit den stetigen Funktoren als 1-Morphismen und den stetigen natürlichen Transformationen als 2-Morphismen bilden die étalen Gruppoide eine 2-Kategorie.

- Eine *Morita-Äquivalenz* ist ein stetiger Funktor $f : S \rightarrow T$, so dass die Abbildung der Objekträume $f_0 : S_0 \rightarrow T_0$ étale ist und f eine Äquivalenz von Kategorien induziert.

A.0.4. Als nächstes werden ein paar elementare Fakten über Topoi vorgetragen, die im Folgenden benötigt werden. Die Standardquelle hierfür ist (Exposé II und IV in [47]).

- Ein *Situs* ist eine Kategorie, die mit einer Grothendieck-Topologie versehen ist.

- Ein (Grothendieck) Topos \mathbf{X} ist eine Kategorie, die äquivalent ist zu der Kategorie der Garben auf einem nicht näher bestimmten kleinen Situs.
- Die Topoi bilden eine 2-Kategorie. Ein 1-Morphismus von Topoi

$$f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$$

ist ein Paar bestehend aus einem direkten Bildfunktork und einem inversen Bildfunktork

$$f_* : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}, \quad f^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X},$$

so dass f^{-1} links adjungiert zu f_* ist und f^{-1} exakt ist. Die 2-Morphismen

$$\alpha : f \Rightarrow g$$

sind die natürlichen Transformationen von Funktoren

$$f_* \Rightarrow g_* \quad \text{bzw. via Adjunktion} \quad g^{-1} \Rightarrow f^{-1}.$$

- In der 2-Kategorie der Topoi existieren alle Faserprodukte.
- Die kanonische Topologie auf einem Topos \mathbf{X} ist die feinste Grothendieck-Topologie, so dass für jedes Objekt $\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathbf{X})$ die Prägarbe $\text{Mor}(\cdot, \mathcal{U})$ eine Garbe ist. Andererseits ist jede Garbe bzgl. der kanonischen Topologie auf \mathbf{X} durch ein Objekt in $\text{Ob}(\mathbf{X})$ darstellbar. Daher heißen die Objekte in $\text{Ob}(\mathbf{X})$ auch Garben auf \mathbf{X} .
- Die Überdeckungen in der kanonischen Topologie sind die epimorphen Familien.
- Eine Überdeckung von \mathbf{X} ist eine Überdeckung der konstanten Garbe $1_{\mathbf{X}}$.
- Für eine Garbe \mathcal{U} auf \mathbf{X} heißt die Kategorie $\mathbf{X}/_{\mathcal{U}}$ deren Objekte Abbildungen $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ sind, der Index Topos zu \mathcal{U} . Es existiert ein kanonischer 1-Morphismus

$$\varphi_{\mathcal{U}} : \mathbf{X}/_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{X},$$

wobei der zugehörige inverse Bildfunktork gegeben ist durch

$$\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \times \mathcal{U}.$$

- Man definiert lokale Eigenschaften des Topos \mathbf{X} mit Hilfe von Überdeckungen $(\mathcal{U}_i \rightarrow 1_{\mathbf{X}})$ und den entsprechenden Eigenschaften der Index Topoi $\mathbf{X}/_{\mathcal{U}_i}$.

Das folgende Beispiel erläutert den Begriff des Index Topos.

- Beispiel A.0.5.** 1.) Für den Topos der Mengen **Sets** und eine Menge I ist der Index Topos $\text{Sets}/_I$ die Kategorie der Mengen, die durch die Elemente von I indiziert sind.
- 2.) Für den Topos $\text{Sh}(T)$ der Garben auf einem topologischen Raum T ist der Index Topos $\text{Sh}(T)/_{\mathcal{U}}$ der Topos der Garben auf dem *Espace étale* $U \rightarrow X$ zu der Garbe \mathcal{U} .

A.0.6. Man benötigt einige Fakten über die Punkte eines Topos. Die Standardquelle hierfür ist (Kapitel 6 in [47], Exposé IV). Die Notation sei wie in A.0.4.

- Ein *geometrischer Punkt* eines Topos \mathbf{X} ist ein 1-Morphismus

$$\bar{x} : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{X},$$

wobei \mathbf{Sets} der Topos der Mengen ist. Der zugehörige inverse Bild Funktor heißt *Faser-funktor*. Die geometrischen Punkte von \mathbf{X} bilden eine Kategorie

$$1\text{-Mor}(\mathbf{Sets}, \mathbf{X})$$

Die Isomorphieklassen geometrischer Punkte heißen *Punkte*.

Die Menge der Punkte $\text{Pt}(\mathbf{X})$ trägt eine kanonische Topologie. Die offenen Teilmengen $U \subset \text{Pt}(\mathbf{X})$ sind induziert durch Untergarben \mathcal{U} der konstanten Garbe $1_{\mathbf{X}}$ via

$$U = \{x \in \text{Pt}(\mathbf{X}) ; \mathcal{U}_{\bar{x}} \neq \emptyset\}.$$

Hierbei bezeichnet x die Isomorphieklasse von $\bar{x} : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{X}$.

- Ein Topos \mathbf{X} hat genügend viele Punkte, falls eine Abbildung von Garben $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ auf \mathbf{X} , deren Halmbildungen $f_{\bar{x}} : \mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{x}}$ alle bijektiv sind, ein Isomorphismus ist.

- Für einen Topos mit genügend vielen Punkten hat man einen Morphismus

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Sh}(\text{Pt}(\mathbf{X})).$$

Der direkte Bildfunktor $\varepsilon_{\mathbf{X},*}$ ordnet hierbei einer Garbe \mathcal{F} auf \mathbf{X} die Garbe

$$U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auf dem Raum $\text{Pt}(\mathbf{X})$ zu, wobei \mathcal{U} die entsprechende Untergarbe von $1_{\mathbf{X}}$ ist.

- Der Funktor $\mathbf{X} \mapsto \text{Pt}(\mathbf{X})$ ist linksadjungiert zu dem Funktor $T \mapsto \mathbf{Sh}(T)$, der einem topologischen Raum T den zugehörigen Topos zuordnet.

Am einfachsten erläutert man die Begriffe an dem étalen Topos eines Schemas:

Beispiel A.0.7. Es sei X ein Schema und $X_{\text{ét}}$ der kleine étale Topos.

- Dann entsprechen die geometrischen Punkte von $X_{\text{ét}}$ geometrischen Punkten

$$\text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X$$

(Theorem 7.9 in [47], Exposé VIII). Weiterhin hat der Topos $X_{\text{ét}}$ genügend viel Punkte.

- Der assoziierte topologische Raum $\text{Pt}(X_{\text{ét}})$ ist kanonisch homeomorph zu X .

- Weiterhin ist $\varepsilon_{X_{\text{ét}}}$ der kanonische Morphismus

$$\varepsilon_X : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}.$$

A.0.8. Im Folgenden benötigt man die Übersetzung einiger topologischer Grundbegriffe in die Theorie der Topoi. Die Standardquelle hierfür ist (Kapitel 9 in [47], Exposé IV).

- Für eine Untergarbe $\mathcal{U} \rightarrow 1_{\mathbf{X}}$ heißt der Index Topos $\mathbf{X}_{/\mathcal{U}}$ (A.0.4) *offener Untertopos*.

Der direkte Bild Funktor $\varphi_{U,*} : \mathbf{X}/U \rightarrow \mathbf{X}$ zu dem kanonischen Morphismus

$$\varphi_U : \mathbf{X}/U \hookrightarrow \mathbf{X}$$

ist ein volltreuer Funktor. Hierdurch erhält man eine eindeutige Korrespondenz zwischen offenen Teilmengen von $\text{Pt}(\mathbf{X})$ (A.0.6) und offenen Untertopoi von \mathbf{X} .

- Allgemeiner kann man nun einer lokal abgeschlossenen Teilmenge $D \subset \text{Pt}(\mathbf{X})$ einen eindeutigen Topos \mathbf{X}_D zuordnen, zusammen mit einem kanonischen Morphismus

$$\varphi_D : \mathbf{X}_D \hookrightarrow \mathbf{X}.$$

Er besitzt die Eigenschaft, dass der zu φ_D gehörige direkte Bildfunktor volltreu ist und das Bild der Punkte $\text{Pt}(\mathbf{X}_D)$ unter φ_D mit der Menge D übereinstimmt. Es heißt \mathbf{X}_D ein *lokal abgeschlossener Untertopos von \mathbf{X}* und φ_D ist eine *lokal abgeschlossene Immersion*.

- Weiterhin heißt eine Garbe \mathcal{F} auf \mathbf{X} *konstruierbar*, wenn $\text{Pt}(\mathbf{X})$ eine disjunkte Zerlegung in lokal abgeschlossene Teilmengen D_j hat, so dass das inverse Bild

$$\varphi_{D_j}^{-1} \mathcal{F}$$

unter der lokal abgeschlossenen Immersion von Topoi $\varphi_{D_j} : \mathbf{X}_{D_j} \hookrightarrow \mathbf{X}$ *lokal konstant* ist. Diese Definition weicht etwas von der Standard Definition in [47] ab.

A.0.9. Es folgt eine kurze Zusammenfassung über die (*erweiterte*) *Fundamentalgruppe* eines Topos. Für Details siehe (Auf 2.7.5 in [47], Exposé IV), (Abschnitt 6 in [46], Exposé VIII).

- Man nimmt an, dass \mathbf{X} zusammenhängend und lokal zusammenhängend ist und es bezeichne \mathbf{X}_{lc} die Kategorie der *lokal konstanten Garben auf \mathbf{X}* .

- Für einen geometrischen Punkt $\bar{x} \in \text{Mor}(\mathbf{Sets}, \mathbf{X})$ ist die (*erweiterte*) *Fundamentalgruppe* $\pi_1(\mathbf{X}, \bar{x})$ definiert als die Automorphismengruppe des Faserfunktors $\mathbf{X}_{lc} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$. Hierbei ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ keine proendliche Gruppe wie in (Exposé V in [45]), sondern vielmehr ein projektives System diskreter Gruppen.

- *Man hat eine Galois-Theorie: Es existiert eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Pro-Objekten in \mathbf{X}_{lc} und den Mengen mit einer Operation von $\pi_1(\mathbf{X}, \bar{x})$.*

A.0.10. Den allgemein bekannten Topos der Garben auf einem topologischen Raum kann man auf kanonische Weise für étale Gruppoide verallgemeinern.

- *Eine Garbe \mathcal{F} auf einem étalen Gruppoid $T = [s, t : T_1 \rightrightarrows T_0]$ besteht aus einer Garbe \mathcal{F}_0 auf T_0 zusammen mit einer T_1 -Operation d.h. einem Isomorphismus*

$$s^{-1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} t^{-1} \mathcal{F}_0,$$

der auf dem Faserprodukt $T_1 \times_{s, T_0, t} T_1$ die üblichen Kozykelbedingungen erfüllt.

- *Die Garben auf T bilden einen Topos $\text{Sh}(T)$.*

Ein Situs hierfür ist die Kategorie $\acute{\text{E}}t(T)$, deren Objekte offene Teilmengen $U \subset T_0$ sind und deren Morphismen 2-Morphismen $\alpha : U_1 \rightrightarrows U_2$ in T_1 sind. Die Topologie auf $\acute{\text{E}}t(T)$ wird erzeugt von allen epimorphen Familien $(\alpha_i : U_i \rightrightarrows U)$.

- Die Zuordnung $T \mapsto \mathbf{Sh}(T)$ ist ein 2-Funktor von den étalen Gruppoiden in die Topoi.

Einen stetigen Funktor $f : S \rightarrow T$ bildet dieser 2-Funktor wie folgt ab:

Es sei \mathcal{F}_0 eine Garbe auf T_0 , die versehen ist mit einer T_1 -Operation. Vermöge der Abbildung $f_1 : S_1 \rightarrow T_1$ erhält man auf dem inversen Bild $f_0^{-1}(\mathcal{F}_0)$ eine S_1 -Operation.

Beispiel A.0.11. Speziell kann man eine Gruppe G als einen étalen Gruppoid auffassen. Dann ist $\mathbf{Sh}(G)$ der klassifizierende Topos $\mathbf{B}(G)$ aller Mengen mit G -Operation.

Etwas ungewohnt und nur in kleinen Kreisen bekannt ist die folgende Definition.

Definition A.0.12. Ein Topos \mathbf{X} heißt *Étendue*, wenn er lokal von der Form $\mathbf{Sh}(T)$ ist mit T einem topologischen Raum, d.h. es existiert eine Überdeckung $\mathcal{U} \rightarrow 1_{\mathbf{X}}$ mit

$$\mathbf{X}_{/\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}(T).$$

A.0.13. Ein topologischer Raum heißt *schlicht*, wenn jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge einen eindeutigen irreduziblen Punkt besitzt. Ein étaler Gruppoid heißt *schlicht*, wenn sein Objektraum schlicht ist. Die Inklusion der schlichten étalen Gruppoide in die étalen Gruppoide besitzt einen rechtsadjungierten Funktor, die *Schlichtifizierung*.

A.0.14. Es sei daran erinnert, dass jede 2-Kategorie eine *unterliegende 1-Kategorie* besitzt mit den 2-Isomorphieklassen von 1-Morphismen als Morphismen.

Proposition A.0.15. Der Funktor $T \mapsto \mathbf{Sh}(T)$ induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Et}.$$

Hierbei sind im einzelnen: \mathbf{Gr} ist die Kategorie der schlichten étalen Gruppoide lokalisiert an Morita-Äquivalenzen und \mathbf{Et} ist die Kategorie der Étendues.

Beweis. Dies ist (Theorem 14 in [8]). Der Vollständigkeit halber wird aber gezeigt, dass der Topos $\mathbf{X} = \mathbf{Sh}(T)$ tatsächlich ein Étendue ist. Dies sieht man wie folgt:

Zunächst einmal besitzt $1_{\mathbf{X}}$ eine Überdeckung mit offenen Teilen $U \subset T_0$. Man beachte hierfür, dass die Yoneda-Prägarbe $\mathrm{Mor}(\cdot, U)$ eine Garbe auf $\mathbf{Ét}(T)$ ist. Dann bildet man den Index Topos $\mathbf{X}_{/U}$. Dieser ist isomorph zu der Kategorie der Garben auf dem Situs $\mathbf{Ét}(T)_{/U}$ (5.4 in [47], Exposé IV). Man sieht nun aber leicht, dass der Topos

$$\mathbf{Sh}(\mathbf{Ét}(T)_{/U})$$

isomorph ist zu dem Topos der Garben auf dem Raum U . □

Anhang B

Alexeevs stabil-semiabelische Varietäten

In diesem Anhang werden einige Fakten über *Alexeevs stabil-semiabelische Varietäten* in [2] wiederholt. Für die Zwecke dieser Arbeit und für die Uniformisierung log-abelscher Varietäten ist es sinnvoll Alexeevs Definition leicht abzuwandeln.

Hierdurch kann man teilweise etwas stärkere Aussagen beweisen als in [2]. Zumal die Beweise in loc. cit. zum größten Teil unvollständig sind.

B.0.16. Man benötigt ein paar Fakten über algebraische Tori aus (Exposé X in [46]).

Ein algebraischer Torus T ist ein S -Gruppenschema, welches étale lokal bzgl. S isomorph ist zu $\mathbb{G}_{m,S}^r$. Die *Charaktergruppe* Λ ist die étale S -Garbe freier abelscher Gruppen

$$\Lambda := \mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{G}_m).$$

Als Funktor auf der Kategorie der valuativen Log-Schemata über S ist dann

$$T = \mathrm{Hom}_S(\Lambda, \mathbb{G}_m).$$

Ist weiterhin \bar{s} ein geometrischer Punkt von S , so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ auf der Faser $\Lambda_{\bar{x}}$, denn Λ ist eine lokal konstante Garbe (A.0.9). Diese Operation heißt *Monodromie* und sie bestimmt den Torus T eindeutig, falls S zusammenhängend ist.

Weiterhin heißt ein S -Torus T *isotrivial*, wenn die kanonische Abbildung

$$\pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\Lambda_{\bar{x}})$$

über einen endlichen Quotienten von $\pi_1(S, \bar{s})$ faktorisiert.

Bemerkung B.0.17. Es folgen ein paar Fakten über semiabelsche Schemata aus [9].

- Ein semiabelsches S -Schema G über S ist ein glattes kommutatives Gruppenschema, so dass die Fasern $G_s = G \otimes_S k(s)$, $s \in S$ Erweiterungen sind

$$1 \longrightarrow T_s \longrightarrow G_s \longrightarrow B_s \longrightarrow 0$$

mit B_s einer abelschen Varietät und T_s einem Torus über $k(s)$.

- Ein semiabelsches S -Schema G induziert auf S eine kanonische Stratifizierung

$$S_r = \{s \in S \mid \dim(T_s) = r\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

- Es ist $G \times_S S_r$ global eine Erweiterung eines abelschen Schemas B mit einem Torus T_r (Theorem 2.10 in [9], Kapitel I) (Unabhängig von der Unterschemastruktur von S_r).

Bemerkung B.0.18. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Kommutativität eines semiabelschen Schemas G aus den übrigen Bedingungen folgt.

Beweis. Es sei $s \in S$ und $m_s \subset \mathcal{O}_{S,s}$ das maximale Ideal. Dann sind die Deformationen

$$G_n = G \times_S \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}/m_s^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Erweiterungen abelscher Schemata durch Tori. Denn der Torusanteil $T_n \subset G_n$ deformiert eindeutig zu einem Torus $T_{n+1} \subset G_{n+1}$ und der Quotient G_{n+1}/T_{n+1} existiert und ist eigentlich, glatt über $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}/m_s^n)$ und somit abelsch. Hieraus folgt die Behauptung, denn jede Toruserweiterung eines abelschen Schemas ist kommutativ. \square

B.0.19. Nun zu den *stabil-semiabelischen Varietäten von Alexeev* (Definition 1.1.11 in [2]).

Definition B.0.20. Es seien G ein semiabelsches S -Schema und Q ein Schema, das flach und lokal von endlichem Typ über S ist und versehen ist mit einer G -Operation. Weiterhin sei eine *equivariante offene Immersion* $G \hookrightarrow Q$ gegeben.

Dann heißt Q oder genauer $G \hookrightarrow Q$ *stabil-semiabelisch* über S , wenn gilt:

1. Die geometrischen Fasern $Q_{\bar{s}} = Q \otimes_S k(\bar{s})$ sind zusammenhängend Cohen-Macaulay und haben Normal-Crossing Singularitäten in Kodimension 1.
2. Die geometrischen Fasern haben nur endlich viele Orbits $G_{\bar{s}} \cdot a$, $a \in Q_{\bar{s}}$.
3. Ferner sind die topologischen Abschlüsse in $Q_{\bar{s}}$ der Orbits $(G_{\bar{s}} \cdot a)^{\text{cls}}$ normal.
4. Die schematischen Stabilisatoren von Punkten in $Q_{\bar{s}}$ sind Untertori von $G_{\bar{s}}$.

Bemerkung B.0.21. Alexeev definiert stabil-semiabelische Schemata $G \hookrightarrow Q$ anders:

- Bei ihm sind die geometrischen Fasern $Q_{\bar{s}}$ lediglich seminormal (siehe 3.3.6).
- Auch die Normalität der $(G_{\bar{s}} \cdot a)^{\text{cls}}$ fordert Alexeev nicht.
- Man hat auch nicht als zusätzliches Datum die G -equivariante offene Immersion $G \hookrightarrow Q$.

Die induzierte Punktierung von Q heißt im Folgenden der *Nullschnitt*:

$$0_G : S \rightarrow G \hookrightarrow Q.$$

Beispiel B.0.22. Für einen Torus T entsprechen die irreduziblen (\Rightarrow normalen) stabil-semiabelischen Varietäten $G \hookrightarrow Q$ über einem k den torischen Varietäten.

Im allgemeinen sind stabil-semiabelische Varietäten aber reduzibel. So kann man

$$\text{Spec}(k[x, y]/(xy))$$

mit einer Struktur als stabil-semiabelische Varietät versehen.

B.0.23. Man benötigt im Folgenden ein paar Fakten über den relativen Picard-Funktor

$$\mathrm{Pic}_{Q/S} = R^1 f_* \mathcal{O}_Q^\times$$

eines eigentlichen stabil-semiabelischen Schemas $f : Q \rightarrow S$.

- Aus den Eigenschaften erhält man, dass $\mathrm{Pic}_{Q/S}$ darstellbar ist durch einen algebraischen Raum, der lokal von endlichem Typ über S ist (Theorem 7.3 in [3]).
- Es sei $\mathrm{Pic}_{Q/S}^0$ die Nullkomponente. Weil die geometrischen Fasern $Q_{\bar{s}}$ seminormal sind, ist der unipotente Anteil der Picard-Varietäten $(\mathrm{Pic}_{Q_{\bar{s}}}^0)^{\mathrm{red}}$ trivial, d.h. die reduzierten geometrischen Fasern von $\mathrm{Pic}_{Q/S}^0$ sind semiabelsche Varietäten (Theorem 4.1.7 in [2]).
- Im Folgenden betrachtet man insbesondere den Fall, dass $Q \rightarrow S$ projektiv ist. In dieser Situation ist der relative Picard-Funktor $\mathrm{Pic}_{Q/S}$ durch ein Schema darstellbar.

Konvention. - Es seien $G \hookrightarrow Q$ ein stabil-semiabelisches Schema über S und \mathcal{A} eine Garbe abelscher Gruppen auf S . Mit einer Rigidifizierung eines $\mathcal{A} \times_S Q$ -Torsors E auf G meint man immer eine Rigidifizierung in dem Nullschnitt 0_G :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} 0_G^{-1} E.$$

- Die globalen Schnitte des relativen Picard-Funktors $\mathrm{Pic}_{Q/S}$ kann (und wird) man im Folgenden mit den rigidifizierten invertierbaren Garben auf Q identifizieren.

Die folgende Proposition zeigt, dass für ein stabil-semiabelisches Schema $G \hookrightarrow Q$ das Theorem of the Square erfüllt ist (Abschnitt 6.3 in [5]).

Proposition B.0.24. Es seien Q ein eigentliches stabil-semiabelisches S -Schema und \mathcal{L} eine rigidifizierte invertierbare Garbe auf Q . Für ein $a \in G(S')$ bezeichne $T_a : G \rightarrow G$ die Translation mit a und \mathcal{L}_a die Faser über a , d.h. das Pullback von \mathcal{L} unter

$$Q \rightarrow S \xrightarrow{a} Q.$$

1. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$T_{a+b}^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_{a+b}^{-1} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} T_a^* \mathcal{L} \otimes T_b^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_a^{-1} \otimes \mathcal{L}_b^{-1}.$$

2. Gilt $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(Q)$, so hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$T_a^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_a.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus (Theorem 4.1.18 in [2]) und der Tatsache, dass die invertierbaren Garben auf beiden Seiten kanonisch rigidifiziert sind und somit kanonisch isomorph sind. Die zweite Aussage sieht man ebenso, denn in dem Beweis von loc. cit. wird gezeigt, dass die Operation von G auf $\mathrm{Pic}_{Q/S}^0$, $\mathcal{L} \mapsto T_a^* \mathcal{L}$ trivial ist. \square

Die Aussagen der folgenden Proposition finden sich im wesentlichen in [2] wieder; die Punktierung von Q erlaubt es jedoch etwas stärkere Resultate zu zeigen.

Proposition B.0.25. Es sei $G \hookrightarrow Q$ ein eigentliches, stabil-semiabelisches Schema über S . Weiterhin sei T ein Torus über S mit Charaktergruppe Λ .

1. Dann hat man bzgl. der étalen Kohomologie einen kanonischen Isomorphismus

$$H := H^1(Q, \Lambda_Q) / H^1(S, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_{Q/S}(T).$$

Hierbei bezeichnet Λ_Q das inverse Bild $f^{-1}\Lambda$ unter $f : Q \rightarrow S$.

2. Die Elemente in H in 1.) entsprechen eindeutig rigidifizierten Λ_Q -Torsoren auf Q .

Jeder rigidifizierte Λ_Q -Torsor ist darstellbar durch ein étales Q -Schema

$$\Phi : \tilde{Q} \longrightarrow Q \quad \text{mit} \quad \tilde{Q} \times_Q G = \Lambda_G.$$

Ferner hat man eine Operation von G auf \tilde{Q} und eine equivariante offene Immersion $G \hookrightarrow \tilde{Q}$ und die Abbildung Φ ist G -invariant.

Beweis. Zu 1.) Aus (Theorem 4.2.4 in [2]) folgt zunächst, dass die étale S -Garbe

$$\text{Hom}_S(T, \text{Pic}_{Q/S})$$

kanonisch isomorph ist zu $R^1 f_* \Lambda_Q$. Man beachte, dass in loc. cit. die fppf-Topologie zu Grunde liegt. In dieser Situation beweist man die Aussage aber ähnlich.

Die *Leray-Spektralsequenz* angewendet auf f und Λ_Q liefert die folgende exakte Sequenz:

$$H^1(S, f_* \Lambda_Q) \rightarrow H^1(Q, \Lambda_Q) \rightarrow H^0(S, R^1 f_*(\Lambda_Q)) \rightarrow H^2(S, f_* \Lambda_Q) \rightarrow H^2(Q, \Lambda_Q). \quad (\text{B.1})$$

Man sieht, dass die Adjunktion von f_* , f^{-1} einen Isomorphismus induziert

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} f_* \Lambda_Q.$$

Weil $Q \rightarrow S$ den Nullschnitt hat, ist aus allgemeinen Gründen der Homomorphismus

$$H^2(S, f_* \Lambda_Q) = H^2(S, \Lambda) \rightarrow H^2(Q, \Lambda_Q)$$

in der Sequenz (B.1) injektiv und somit folgt die 1. Aussage.

Zu 2.) Die Darstellbarkeit von \tilde{Q} folgt aus (Lemma 5.4 in [46], Exposé X).

Für den Beweis der Trivialität von $\tilde{Q} \times_Q G$ sei ohne Einschränkung Λ konstant. Denn

$$\Lambda_Q \xrightarrow{\sim} \tilde{Q} \times_Q G$$

ist durch die gegebene Rigidifizierung von $\tilde{Q} \rightarrow Q$ eindeutig bestimmt.

In dem Fall $S = \text{Spec}(R)$ mit R einem diskreten Bewertungsring folgt die Behauptung, weil G normal ist und somit für étale Kohomologie von $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^r$ gilt

$$H^1(G, \Lambda) = 0.$$

Den allgemeinen Fall kann man mit einem Spezialisierungsargument hierauf reduzieren. Siehe die Ausführungen in (Bemerkung 6.10 in [45], Exposé IX).

Es gilt noch zu zeigen, dass \tilde{Q} eine kanonische G Operation trägt.

Man betrachtet hierfür den induzierten Homomorphismus $T \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}^0$. Ein kategorischer Punkt $t \in T(S')$ definiert eine rigidifizierte invertierbare Garbe $\mathcal{L}(t)$ auf Q .

Nach Proposition B.0.24 hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$T_a^* \mathcal{L}(t) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(t) \otimes \mathcal{L}(t)_a,$$

wobei wie gewohnt $a \in G(S')$, $T_a^* \mathcal{L}(t)$ das Translat und $\mathcal{L}(t)_a$ die Faser sind.

Nun entspricht die Abbildung $T \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}^0$, $t \mapsto T_a^* \mathcal{L}(t)$ (bzw. $t \mapsto \mathcal{L}(t)_a$) den Λ_Q -Torsoren $T_a^* \tilde{Q}$ (bzw. \tilde{Q}_a). Somit erhält man einen kanonischen Isomorphismus

$$\tilde{Q} \otimes \tilde{Q}_a \xrightarrow{\sim} T_a^* \tilde{Q}.$$

Dieser Isomorphismus geht in die umgekehrte Richtung, weil invertierbare Garben und Geradenbündel bzw. \mathbb{G}_m -Torsoren einander kontravariant entsprechen.

Weiterhin hat $\tilde{Q} \times_Q G$ nach obigen Ausführungen eine kanonische Trivialisierung

$$\Lambda_Q \xrightarrow{\sim} \tilde{Q} \times_Q G.$$

Somit hat man einen kanonischen Isomorphismus von Λ_Q -Torsoren

$$\tilde{Q} \xrightarrow{\sim} T_a^* \tilde{Q}.$$

Diese Isomorphismen definieren eine Operation von G auf \tilde{Q} . □

Bemerkung B.0.26. Man betrachtet eine Situation wie in Proposition B.0.25. Es sei weiterhin T der S -Torus mit Charaktergruppe Λ . Ein kategorischer Punkt $t \in T(S)$ induziert eine Λ -Operation auf dem trivialen Geradenbündel $\tilde{Q} \times_S \mathbb{A}_S^1$ über \tilde{Q} durch

$$(q, v) \mapsto (\lambda \cdot q, \lambda(t) \cdot v).$$

Die Operation entspricht einem étalen Abstiegsdatum von $\tilde{Q} \times_S \mathbb{A}_S^1$ nach Q . Jedes solche Abstiegsdatum ist effektiv. Man erhält somit eine Abbildung

$$T \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}^0.$$

Diese stimmt mit der Abbildung überein, die Proposition B.0.25 liefert.

B.0.27. Es sei $G \hookrightarrow Q$ ein stabil-semiabelisches Schema über S , so dass G global eine Erweiterung eines abelschen Schemas B durch den Torus T ist. Weiterhin sei ein T -linearisierter quasikohärenter \mathcal{O}_Q -Modul \mathcal{F} gegeben.

- Hierbei besteht eine T -Linearisierung von \mathcal{F} aus Isomorphismen

$$T_a^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F},$$

die mit der T -Operation verträglich sind (Definition 1.6 in [30], §3). Hierbei sind $a \in T(S)$ ein kategorischer Punkt und $T_a : Q \rightarrow Q$ die Translation.

- Ist das direkte Bild $f_* \mathcal{F}$ unter $f : Q \rightarrow S$ ein quasikohärenter \mathcal{O}_S -Modul, so hat man nach (Proposition 4.7.2 in [46], Exposé I) eine Zerlegung in Eigenräume

$$f_* \mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda.$$

Jeder der Eigenräume \mathcal{F}_λ ist ein quasikohärenter \mathcal{O}_S -Modul.

- Via fppf Abstieg sieht man, dass die Einschränkung $\mathcal{F}|_G$ kanonisch nach B absteigt.

B.0.28. Es sei daran erinnert, dass eine invertierbare Garbe \mathcal{L} auf einem Schema X , welches lokal von endlichem Typ über S ist, ample heißt, wenn jeder Punkt in S eine affine Umgebung $U = \text{Spec}(R)$ besitzt, so dass die Schnitte der Potenzen \mathcal{L}^n , $n \geq 0$ über $X \times_S U$ die Topologie erzeugen, d.h. die Mengen

$$\{x \in X \times_S U; s(x) \neq 0\}, \quad s \in \Gamma(X \times_S U, \mathcal{L}^n)$$

bilden eine Basis der Topologie von $X \times_S U$. Es sei darauf hingewiesen, dass $X \rightarrow S$ nicht notwendig quasikompakt ist. In obiger Situation existiert eine offene Immersion

$$X \times_S U \hookrightarrow \text{Proj}_R\left(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X \times_S U, \mathcal{L}^n)\right).$$

Proposition B.0.29. *Es sei $G \hookrightarrow Q$ ein stabil-semiabelisches S -Schema, wobei G global eine Erweiterung des abelschen Schemas B durch den Torus T sei.*

1. *Es sei \mathcal{L} eine invertierbare Garbe auf Q , so dass $\mathcal{L}|_G$ eine T -Linearisierung trägt. Dann existiert ein Λ_Q -Torsor $\Phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ wie in Proposition B.0.25, so dass das Pullback $\tilde{\mathcal{L}} = \Phi^* \mathcal{L}$ eine T -Linearisierung trägt.*
2. *Es besitze Q eine ample invertierbare Garbe \mathcal{L} , so dass die Einschränkung $\mathcal{L}|_G$ eine T -Linearisierung trägt. Ferner sei $\Phi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ der Λ_Q -Torsor zu \mathcal{L} in 1.). Dann existiert ein eindeutiger T -invarianter, G -equivarianter flacher Morphismus*

$$\Pi: \tilde{Q} \longrightarrow B,$$

so dass die Einschränkung $\Pi|_G: G \rightarrow B$ die kanonische Faserung ist.

Beweis. Zu 1.) Man betrachtet die von den abelschen Varietäten bekannte Abbildung

$$\lambda(\mathcal{L}): G \rightarrow \text{Pic}_{Q/S}, \quad a \mapsto T_a^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1},$$

wobei $a \in G(S')$ und $T_a: G \rightarrow G$ die Translation mit a ist.

Nach Proposition B.0.24 ist die Abbildung $\lambda(\mathcal{L})$ ein Gruppenhomomorphismus. Nach Proposition B.0.25 bestimmt die Inklusion $\lambda_{\mathcal{L}}(T) \hookrightarrow \text{Pic}_{Q/S}$ einen Λ_Q -Torsor

$$\Phi: \tilde{Q} \rightarrow Q,$$

wobei Λ_Q die Charaktergruppe von $\lambda_{\mathcal{L}}(T)$ ist. Weiterhin hat man nach Konstruktion für alle kategorischen Punkte $a \in T(S')$ eine kanonische Trivialisierung

$$\mathcal{O}_Q \xrightarrow{\sim} T_a^* \tilde{\mathcal{L}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}^{-1} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_a^{-1}.$$

Zusammen mit der durch die T -Linearisierung von $\mathcal{L}|_G \simeq \tilde{\mathcal{L}}|_G$ induzierten Trivialisierung $\mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_T$ erhält man einen kanonischen Isomorphismus

$$T_a^* \tilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{L}}.$$

Aus dem Theorem of the square in Proposition 5.4.18 erhält man schließlich, dass diese Isomorphismen eine T -Linearisierung auf $\tilde{\mathcal{L}}$ induzieren.

Zu 2.) Via étalen Abstieg kann man annehmen, dass S quasikompakt ist und dass der Torus T zerfällt und somit die Charaktergruppe Λ konstant ist.

In dieser Situation existiert eine Untergruppe $\Lambda' \subset \Lambda$ von endlichem Index, die frei und eigentlich diskontinuierlich bzgl. der Zariski Topologie auf \tilde{Q} operiert.

Nach Voraussetzung ist die invertierbare Garbe \mathcal{L} ample auf Q . Aus obigen Ausführungen erhält man, dass das Pullback $\tilde{\mathcal{L}} = \Phi^*\mathcal{L}$ nach \tilde{Q} ebenfalls ample ist.

Man kann annehmen, dass $S = \text{Spec}(R)$ affin ist und dass eine offene Immersion existiert

$$\tilde{Q} \hookrightarrow \text{Proj}_R\left(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^n)\right).$$

Nach dem ersten Teil kann man $\tilde{\mathcal{L}}$ mit einer T -Linearisierung versehen. Die T -Linearisierung von $\tilde{\mathcal{L}}^n$ induziert via Zerlegung in Eigenfunktionen eine Darstellung

$$\Gamma(X, \mathcal{L}^n) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_{n,\lambda}.$$

Man betrachtet die induzierte kanonische Abbildung

$$\Pi : \tilde{Q} \rightarrow \text{Proj}_R\left(\bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ \lambda = 0}} A_{n,\lambda}\right) = X.$$

Nach Konstruktion ist die Abbildung Π invariant unter der Operation von T . Weil B der Quotient G/T ist, induziert die Einschränkung $\Pi|_G$ somit eine Abbildung

$$h : B \rightarrow X.$$

Zunächst sieht man, dass die Abbildung h eine offene Immersion ist: Denn die Einschränkung $\mathcal{L}|_G$ steigt kanonisch zu einer amplen invertierbaren Garbe \mathcal{M} auf B ab und die T -invarianten Schnitte in $\Gamma(G, \mathcal{L}|_G)$ sind die Urbilder der Schnitte in $\Gamma(B, \mathcal{M})$.

Die Abbildung h ist abgeschlossen, denn das abelsche Schema B ist eigentlich. Nimmt man an, dass S und damit auch B zusammenhängend ist, so ist h ein Isomorphismus.

Auf der anderen Seite ist auch \tilde{Q} zusammenhängend. Folglich ist $\Pi(G) \simeq B$ und man erhält die gewünschte Abbildung. Die Flachheit dieser Abbildung ist evident. \square

Literaturverzeichnis

- [1] A. Abbes, Réduction Semi-Stable Des Courbes, *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique*, Birkhäuser (2000), 59 - 110
- [2] V. Alexeev, Complete Moduli in Presence of Semiabelian Groupaction, *Annals of Math.* **155** (2002), 611 - 708
- [3] M. Artin, Algebraization of formal Moduli I, *Papers in Honor of K. Kodaira*, Princeton University Press, 1969, 21 - 71
- [4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, Degenerating abelian varieties, *Topology* **30**, Nr. 4 (1991), 653 - 698
- [5] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud *Neron Modells*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik **21**, 3. Folge (1990)
- [6] C. Chevalley, Classification de groups die Lie algébriques, Séminaire E.N.S. (1956 - 58)
- [7] P. Deligne, D. Mumford, The Irreducibility Of The Space Given Genus, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36** (1969), 75 - 109
- [8] D. Pronk, Étendues and stacks as bicategories of fractions, *Compositio Math.* **102** (1996), 243 - 303
- [9] G. Faltings, C.-L. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik **22**, 3. Folge, (1990)
- [10] S. Greco, C. Traverso, On seminormal Schemes, *Compositio Math.* **40** (1989), 325 - 365
- [11] A. Haefliger, Groupoides d'holonomie et classifiants, *Astérisque* **116** (1982)
- [12] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, GTM **52** (1977)
- [13] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, *Annals of Math.* (2) **96** (1972), 318 - 337
- [14] L. Illusie, Logarithmic Spaces, *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry*, Perspectives in Math. **15**, Academic Press (1994), 183 - 203
- [15] L. Illusie, An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayama on Logarithmic étale Cohomology, *Astérisque* **279** (2002)

- [16] F. Kato, Log smooth deformation theory, *Tohoku Math. J.* **48** (1996), 317 - 354
- [17] F. Kato, Exactness, integrality and Log-Modifications, *Preprint* (1999), <http://arXiv.org/abs/math/9907124>
- [18] K. Kato, Toric Singularities, *American J. in Math.* **116** (1994), 1073 - 1099
- [19] K. Kato, Logarithmic Structures of Fontaine - Illusie, *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191 - 224
- [20] K. Kato, Logarithmic Degeneration and Diedonné Theory, (*unveröffentlichter*) *Preprint* (1989)
- [21] K. Kato, Logarithmic Structures of Fontaine - Illusie II, Logarithmic flat topology, (*unvollständiger*) *Preprint* (1991)
- [22] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Springer-Verlag, LNM **339** (1970)
- [23] K. Künnemann, Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing, *Duke Math. J.* **95** (1998), Nr. 1, 161 - 212.
- [24] J. Lipman, Rational Singularities, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36** (1969), 195 - 279
- [25] W. Lütkebohmert, The structure of proper rigid groups, *J. reine angew. Math.* **468** (1995), 167 - 219
- [26] W. Massey, *Homology and Cohomology Theory*, Monographs And Textbooks In Pure And Applied Mathematics (1978)
- [27] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **8** (1997)
- [28] J. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press (1980)
- [29] L. Moret-Bailly, Pinceaux De Variétés Abéliennes, *Astérisque* **129** (1985)
- [30] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press (1974)
- [31] D. Mumford, An Analytic Construction of Degenerating Abelian Varieties over Complete Rings, *Compositio Math.* **24**, Nr 3 (1972)
- [32] D. Mumford, J. Fogaty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik **34**, 3. Folge (1992)
- [33] C. Nakayama, Logarithmic étale cohomology, *Math. Annal.* **308** (1997), 365 - 404
- [34] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik **15**, 3. Folge (1987)
- [35] M. Olsson, The logarithmic Cotangent Complex, *Preprint*
- [36] M. Olsson, Log Algebraic Stacks and Moduli of Log-Schemes, *Dissertation*,

- [37] N. Ramachandran, Duality of Albanese and Picard 1-Motives, *K-Theory* **22**, Nr. 3 (2001), 271-301
- [38] J.-P. Serre, *Local Fields*, Springer-Verlag, GTM **67**, (1995)
- [39] J. Stix, Projective Anabelian Curves in Positive Characteristic and Descent Theory for Log-Étale Covers, *Dissertation* (2002)
- [40] H. Thompson, On toric Log-Schemes, *Dissertation* (2002)
- [41] T. Tsuji, Saturated morphisms of logarithmic schemes, *Preprint* (1997)
- [42] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra II*, Springer-Verlag, GTM **29**
- [43] J. Dieudonné, A. Grothendieck, Étude Cohomologique des faisceaux Cohérents, (EGA III), *Publ. Math. I.H.E.S.* **11** (1961), **17** (1963)
- [44] J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Étude Locale des Schémas et des Morphismes de Schémas* (EGA IV), *Publ. Math. I.H.E.S.* **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967)
- [45] A. Grothendieck, M. Raynaud, Mme. Raynaud, *Revêtement Étales et Groupes Fondamentale (SGA 1)*, Springer-Verlag, LNM **224** (1971)
- [46] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en Groupes (SGA 3)*, Springer-Verlag, LNM **151**, **152**, **153** (1970)
- [47] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4)*, Springer-Verlag, LNM **269**, **270**, **305** (1972 - 73)

Index

- Assoziierte Log-Struktur zu einer Prälog-Struktur, 23
- Assoziierter
 - Fächer mSü zu einem log-geringten Topos, 30
 - Polyederkegelkomplex zu einem Log-Schema, 40
 - Polyederkomplex zu einem vertikalen Log-Schema, 69
- Assoziiertes valuatives Log-Schema, 79
- Ausgezeichnet
 - Log-Struktur, 27
 - Monoid, 9
- Bewertungen
 - eines Fächers, 77
 - eines Log-Schemas, 80
- Bruchideale von Monoiden, 10
- Charakteristik, 9, 25
- CW-Topologie, 110
- Étendue, 134
- Exponentialabbildung, 111
- Fächer, 11
 - affiner, 11
 - Étendue, 16
 - mit Selbstüberschneidung (mSü), 18
- Fan-Aufblasung, 12, 18
- Fan-Modifikation, 12, 18
 - eigentliche, 13
- Fs
 - Log-Struktur, 27
 - Monoid, 9
- Grothendieckgruppe, 9
- Ideale von Monoiden, 10
- Integer
 - Abbildung, 60
 - Monoid, 9
- Irreduzible Elemente, 10
- Ishida Komplex, 72
- Karte, 27
 - einer Abbildung, 27
 - einer Log-Struktur, 26
- Kohärente
 - Log-Struktur, 27
 - Monoidgarben
 - auf einem Fächer, 12
 - auf einem log-geringten Topos, 27
- Kombinatorisch regulär, *siehe* Log-Schema
- Ku-fqe
 - Abbildung, 66
 - Topologie, 66
- Kummer Abbildung, 66
- Log-étale, 51
- Log-abelsche Log-Gruppe, 96
- Log-Aufblasung, 44
- Log-Differentiale, 51
- Log-flach, 65
- Log-fqe, 65
- Log-fqe Topologie, 85
- Log-geringter Topos, 24
- Log-glatt, 51
- Log-Gruppe, 87
- Log-Modifikation, 46
- Log-quasi-endlich, 65
- Log-Schema, 25
 - kombinatorisch reguläres, 49
 - log-reguläres, 31
 - ohne Selbstüberschneidung, 39
 - Zariski, 40
- Log-semiabelsche Log-Gruppe, 96
- Log-Struktur, 23
 - assoziierte, 23
 - fs, 27
 - kohärente, 27
 - quasikohärente, 27

Standard, 25
 triviale, 24
 Log-Torus, 91
 Lokalisierungen von Monoiden, 11
 Monoid
 ausgezeichneter, 9
 fs, 9
 integrer, 9
 saturierter, 9
 scharfer, 9
 Monoidaler Raum, 11
 Monoidaler Topos, 16
 Polarisierung, 126
 Polyederkegel, 13
 Polyederkegelkomplex, 13
 Polyederkegelzerlegung, 14
 Polyederkomplex, 68
 Prälog-Struktur, 23
 Primideal eines Monoids, 10
 Projektive Fächer, 12
 Pushout von Monoiden, 10
 Quasikohärente
 Log-Struktur, 27
 Monoidgarben
 auf einem Fächer, 12
 auf einem log-geringsten Topos, 27
 Rationale Unterteilung, 14
 Reduzierte strikte Gruppoide, *siehe* Fächer
 mit Selbstüberschneidung
 Saturiert
 Abbildung, 60
 Monoid, 9
 Saturierung
 eines Log-Schemas, 27
 eines Monoids, 10
 Scharf, *siehe* Monoid
 Selbstüberschneidung, *siehe* Log-Schema
 ohne Selbstüberschneidung, Fächer
 mit Selbstüberschneidung
 Semi-stabil, 69
 Spektrum eines Monoids, 11
 Stückweise lineare Funktion, 14
 Stabil-semiabelische Varietät, 136
 Star-Konstruktion
 für Fächer, 54
 für Log-Schemata, 56, 57
 Streng konvex, 92, 122
 Strikte Abbildungen, 17
 Strikte Transformation, 82
 Strikter Anteil, 88
 t-Flach, 81
 Tensorprodukte von Monoidmengen, 10
 Torisches Schema, 90
 Toroidale Abbildung, 54
 Toruseinbettung, 90
 Valuativ, 76
 Vertikal, 68
 Vertikaler Anteil, 95

Abstract

In general an abelian variety over the quotient field of a discrete valuation ring doesn't necessarily extend to an abelian scheme over the spectrum of the given discrete valuation ring. In this case the abelian variety is said to have bad reduction. Grothendieck has proven a famous semiabelian reduction theorem, which states that after a finite ramified base change the abelian variety has an extension to a semiabelian scheme. As, in general, a semiabelian scheme is not compact, the following question arises: Given a semiabelian scheme over the spectrum of a discrete valuation ring with abelian generic fibre, is it possible to construct a toroidal compactification in the sense of [22]. Mumford, Raynaud, Faltings and Chai, et. al. constructed such toroidal compactifications; see [9], [31]. These compactifications are not canonical, but they are unique up to toroidal modifications. The special fibre is in general a singular scheme, which doesn't have a simple description and which is called a degenerate abelian variety. It is a long standing question to give an intrinsic description of degenerate abelian varieties. The interest lies, for example, in the problem of giving a functorial interpretation to the toroidal compactification of the moduli space of polarized abelian varieties; see [9]. Alexeev tried to deal with this problem by his theory of stable-semiabelic varieties. But he didn't quite manage, because there exist stable-semiabelic varieties, which are not degenerate abelian varieties; see [2]. K. Kato suggested in [20] that, by adding a logarithmic structure in the sense of Fontaine-Illusie, a solution of this problem should be possible.

The present thesis shows that it is indeed possible. To this purpose I develop a theory of logarithmic abelian varieties, extending the classical notion of an abelian variety. The theory is related to Alexeev's theory, since log-abelian varieties are in some sense stable-semiabelic varieties. One of the main results in this thesis is a uniformization theorem for log-abelian varieties. Here, the special fibre of a relative complete model in sense of Mumford serves as a uniformizing space; see [31]. The log-abelian variety is the quotient by a period lattice of full rank. In the totally degenerate case it is furthermore proven that a log-abelian variety is a degenerate abelian variety if and only if it admits a polarisation. The last condition is by definition equivalent to the fact that the period lattice fullfills a strong symmetry condition; similar as in [31]. As in the classical situation it is shown that a log-abelian variety admits a polarisation if and only if it is projective.

It should be noted that in this thesis there are many theorems proven and methods developed, which are of their own interest in the theory of logarithmic algebraic geometry. Not all of them are strictly necessary for understanding the above stated main theorems, but they give new insights. For example I give a construction of an associated fan to a log-scheme generalizing the theory in [22]. Furthermore I introduce the notion of self-intersection to log-schemes. And, finally, I give criteria to descend a log-structure from the étale to the Zariski site. One should remark that the criteria given in [20] are not complete. I also prove a theorem on valuative Log-Schemes in the sense of Kato, that is analogous to the famous theorem of Raynaud in rigid-analytic geometry.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei allen Freunden und Verwandten, insbesondere bei Gerd, Ulrike, Guido und Sandra Pahnke sowie bei Simone Heinze. Weiterer Dank geht an meinen Betreuer Prof. Dr. Werner Lütkebohmert sowie Prof. Dr. Urs Hartl, Dr. Thorsten Schmechta, Priv.-Doz. Dr. Jochen Koenigsmann, Dr. Matthias Künzer, Prof. Dr. Stefan Schröer, Prof. Dr. Florian Pop und Prof. Dr. Gabriele Nebe für ihre Unterstützung meiner Promotion. Weiterhin möchte ich Wiltrud Cuny, Jörg Marhenke, Andreas Martin, Dr. Markus Haase und allen weiteren Kollegen an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm danken.

