Deligne

28 février 1994

Cher Breen,

Le complexe standard qui calcule la cohomologie de Hochschild, décalé de 1 :

$$K^{p-} = \mathrm{Hom}_k(\overset{p+1}{\otimes} A, A)$$

est un exemple d'algèbre de Lie différentielle graduée, ~~...~~ placée en degré ≥ -1. Je me suis demandé à quoi cela correspondait du point de vue de la théorie des déformations. Réponse :

(a) Une algèbre DG $\mathcal{L}$, $d^\circ \geq -1$, sur k de char. 0, définit pour tout anneau artinien local Λ de corps résiduel k, une 2-catégorie $\mathcal{G}(\Lambda)$.

(b) Dans l'exemple, c'est (à équivalence près)

α) déformations A_Λ de A sur Λ ($A_\Lambda \otimes \Lambda/m \xrightarrow{\sim} A$ donné)

β) 1-morphismes : $A_\Lambda \to A'_\Lambda$: bimodule $A_\Lambda - L - A'_\Lambda$ libre de rang 1 sur A_Λ (à gauche) et A'_Λ (à droite), trivialisé mod m (i.e., mod m, identifié au AA-bimodule A

γ) 2-morphismes : isomorphismes de bimodules (compatible aux trivialisations)

Il serait équivalent de dire qu'un 1-morphisme est un isomorphisme $A_\Lambda \xrightarrow{\sim} A'_\Lambda$ de déformation, et qu'un morphisme $\alpha_1 \to \alpha_2$ est un isomorphisme entre les foncteurs d'extension des scalaires correspondant (compatible à l'isomorphisme identique mod m). Pour $\Lambda = k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, un automorphisme de la déformation triviale est une dérivation D. ~~L'extension~~ Un isomorphisme du foncteur identique avec l'extension des scalaires correspondante est la donnée de $a \in A$ tel que $D = \mathrm{ad}\, a$ (dérivation intérieure)

Voici la construction générale. ~~Soit~~

$\mathcal{L}$ DG. Donne

α) $\mathcal{L}$ graduée, Lie sous-jacent [oubliant]

β) avec une action de l'algèbre de Lie graduée (à [ ] = 0) k[illegible]

On passe à l'algèbre graduée

$\mathcal{L}^+ = k[-1] \ltimes \mathcal{L}$ — éléments $\lambda d + \ell$ (d = 1 générateur [illegible])

avec $[d, \ell] = d\ell$

Notation : pour x de degré impair, $x^2 := \frac{1}{2}[x,x]$

Pour Λ donné, on passe ensuite ~~par~~ [illegible] $\otimes \Lambda$ à

$\mathcal{L}^+_\Lambda$: algèbre de Lie graduée sur Λ. Voici $\mathcal{G}(\Lambda)$

<u>Objets</u> : éléments $d+\ell$ de $(\mathcal{L}^+_\Lambda)^1$, $\ell \in \mathcal{L}_\Lambda$, $d+\ell \equiv d$ (m) ie $\ell \in \mathcal{L}^1 \otimes m$

tels que $(d+\ell)^2 = 0$

<u>ie</u> $d(\ell) + \ell^2 = 0$

<u>1-morphisme</u> $d+\ell_1 \longrightarrow d+\ell_2$: pour $\exp(\mathcal{L}^0)$ le groupe formel attaché à $\mathcal{L}^0$, et $\exp(\mathcal{L}^0)(\Lambda)$ ses Λ-points ($\equiv 1 \bmod m$) — agissant sur $\mathcal{L}^+_\Lambda$. C'est

$f \in \exp(\mathcal{L}^0)(\Lambda)$ tel que $f(d+\ell_1)f^{-1} = d+\ell_2$

où $f(\ )f^{-1}$ est l'action : on a $\log : \exp(\mathcal{L}^0)(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^0 \otimes m$, et

$$f(d+\ell)f^{-1} = \exp(\mathrm{ad}\log f)[d+\ell].$$

La composition est la composition dans $\exp(\mathcal{L}^0)(\Lambda)$ [ie via log : $\mathcal{L}^0 \otimes m$ avec la loi de Campbell-Hausdorff]

<u>2-morphisme</u> Soit $\delta = d + \ell$ un objet : $\delta^2 = 0$ dans $\mathcal{L}^+_\Lambda$

$\operatorname{ad} \delta$ est une dérivation de carré nul de $\mathcal{L}^+_\Lambda$. Sur $\mathcal{L}^{-1}_\Lambda$, on a

$$[[\delta a], b] = [a, [\delta b]] \qquad \text{car } [a,b]=0 \text{ et Jacobi}$$

De plus, $$[\delta, [[\delta a], b]] = [[\delta a][\delta b]] \qquad (\text{Jacobi et } \delta^2 = 0)$$

On a obtenu un $[\ ]$ sur $\mathcal{L}^{-1}_\Lambda$, et $\operatorname{ad}\delta$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $\mathcal{L}^{-1}_\Lambda$ vers $\mathcal{L}^0_\Lambda$, faisant de $\mathcal{L}^{-1}_\Lambda$ une extension centrale de $\operatorname{Im} \operatorname{ad} \delta$

Notation : $[a,b]_\delta = [[\delta a], b]$ sur $\mathcal{L}^{-1}$

$$\text{Soit} \quad \begin{tikzcd} d+\ell_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d+\ell_2 \end{tikzcd} \quad \text{et}$$

écrivons $g = f a$, $a : d+\ell_1 \to d+\ell_1$. On veut : $\operatorname{Hom}(f,g) = \operatorname{Hom}(\mathrm{Id}, a)$

On a, pour $\delta_1 = \operatorname{ad}(d+\ell_1)$: $a \in \exp(\mathcal{L}^0)(\Lambda)$, $a = \exp(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{L}^0 \otimes m$;

avec : $d+\ell_1$ fixe par a, i.e. $\delta_1(\alpha) = 0$

Le groupe $\exp(\mathcal{L}^{-1}_\Lambda, [\ ]_{\delta_1})$ agit sur ces a par translation à gauche par son image dans $\exp(\mathcal{L}^0_\Lambda)$. Ceci définit les morphismes :

$$\begin{tikzcd} (d+\ell_1) \arrow[r, shift left=2, "1"] \arrow[r, shift right=2, "\exp(\alpha)"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow"] & d+\ell_1 \end{tikzcd} \quad \text{est } u \in \mathcal{L}^{-1} \otimes m \text{ tel}$$

que $[\delta, u] = \alpha$. Plus généralement,

$$\begin{tikzcd} (d+\ell_1) \arrow[r, shift left=2, "\cancel{\exp(\alpha)}\, a"] \arrow[r, shift right=2, "b"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow x"] & (d+\ell_1) \end{tikzcd} \quad \text{est } x \in \exp(\mathcal{L}^{-1} \otimes m, [\ ]_{d+\ell_1})$$

tel que $b = (\text{image de } x \text{ par } \operatorname{ad}(d+\ell_1)) . a$

avec la composition correspondante (Campbell-Hausdorff pour $\mathcal{L}^{-1} \otimes m, [\ ]_{d+\ell_1}$). Il reste à définir le composé de x et y dans

$$\begin{tikzcd} (d+\ell_1) \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow x"] & (d+\ell_2) \arrow[r, shift left=2, "g"] \arrow[r, shift right=2, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow y"] & (d+\ell_3) \end{tikzcd}$$

Il faut d'abord voir ce qui se passe ici au lieu d'écrire.

$f' = fa$, $\mathrm{Hom}(f,f') = \mathrm{Hom}(1,a)$, on écrit

$f' = (faf^{-1})f$.

On a $\mathrm{Hom}(1,a) \to \mathrm{Hom}(1, faf^{-1})$, conjuguant par f ce qui donne un automorphisme de l'algèbre de Lie graduée $\mathcal{L}^{+}_{\Lambda}$.

$$x = \exp(X),\ X \in \mathcal{L}^{-1}\otimes m \longmapsto fxf^{-1} = \cancel{\exp(\mathrm{ad} f)(}$$
$$\exp(\exp(\mathrm{ad}\log f)(X))$$

Il faut alors définir la composition pour $\mathrm{Iso}(d+\ell_2) = d+\ell_2$:

$$(d+\ell_2) \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}}{\scriptstyle\downarrow x} (d+\ell_2) \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}}{\scriptstyle\downarrow y} (d+\ell_2) \quad :$$

on a $\exp(\mathcal{L}^{-1}\otimes m, [\ ]_{d+\ell_2}) \xrightarrow{\phi} \exp(\mathrm{Ker}(d+\ell_2) \subset \mathcal{L}^{0}\otimes m)$,

ϕ induit par $[d+\ell_2,\ ]$

et $f' = \phi(x)f$ $\qquad g' = \phi(y)g$

ce qui amène à définir

$$y * x : gf \to g'f' \quad : \quad y*x = y \cdot \underbrace{gxg^{-1}}_{\text{action de } \mathcal{L}^{0}_{\Lambda} \text{ sur } \mathcal{L}^{-1}_{\Lambda}}$$

compatible à

$$g'f' = \phi(y)g\,\phi(x)f = \phi(y)\,g\,\phi(x)\,g^{-1}) \cdot gf.$$

En effet, ϕ est compatible à l'action de $\mathrm{Ker}(d+\ell_2)$ sur $\mathcal{L}^{-1}_{\Lambda}$ et $\mathcal{L}^{0}_{\Lambda}$

J'ai la flemme de vérifier les axiomes, mais je ne vois pas ce qu'il pourrait y avoir à craindre.

<u>Variante</u> : ~~Arghaaaa~~ dans la catégorie $\mathcal{G}(\Lambda)$ peut encore être décrite comme :

a) objet : choisir un représentant dans chaque classe de $\exp(\mathcal{L}^{0}\otimes m)$ - conjugaison de $\delta = d+\ell$

b) le représentant δ étant choisi, on considère l'algèbre de Lie DG, $d^\circ \leq 0$: $\tau_{\leq 0}(\mathcal{L}^+ \otimes m, \mathrm{ad}\,\delta)$; on lui attache une algèbre de Lie semi-simpliciale :

$$\mathcal{M}, \text{ DG}, d^\circ \ 0 \text{ et } -1 \longmapsto \begin{cases} \mathcal{M}^0 : \text{de Lie} \\ \mathcal{M}^1 : \text{de Lie par } [\delta x, y] \\ \phi = d : \mathcal{M}^{-1} \to \mathcal{M}^0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{M}^0 \ltimes \mathcal{M}^{-1} \overset{pr}{\underset{pr+\Phi}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}^0$$

est semi-simplicial tronqué, prendre son cosquelette.
Prenant exp, on obtient des groupes plutôt que des algèbres de Lie, et la catégorie voulue.

J'imagine que cette construction

Lie DG, d° dans $[-1, 0]$ $\longrightarrow$ Lie simplicial, cosq de sq_1

est homotope à celle de Quillen pour les types d'homotopie rationnel [Quillen étendu au cas où H^0(Lie DG) est non nécessairement nul, plutôt].

<u>Questions</u> 1. Est-ce bien compatible à Quillen

2. Si oui, cela suggererait ce qu'il faut faire si $\mathcal{L}$ est en $d^\circ \geq -N$: on obtiendrait des groupes semi-simpliciaux homotopes à leur cosq sq_N par la construction de Quillen. Comment faut il penser à ces objets dans le style de la pourriture des champs, comme n-catégories ? Que faire de bon avec la partie de $d^\circ > 1$ de l'algèbre de Lie DG ? Comment adapter les axiomes de Schlessinger ?

Plus concret : Z. Ran a eu l'idée suivante : Soit X, dim N, a fibré canonique trivial. Choisissons ω ~~de d° maximal trivialisant~~ ~~On~~ Ω^N_X. On a :

a) Une algèbre de Lie graduée, en degrés $[-N+1, 1]$: les $\overset{i}{\wedge} T$ (en degré $1-i$), avec le crochet de Schouten.

b) Par ω, $\overset{i}{\wedge} T \xrightarrow{\sim} \overset{N-i}{\wedge} \Omega^1$, et d se transporte à $\overset{*}{\wedge} T$: on obtient une différentielle d sur $\overset{*}{\wedge} T^*$, indépendante du choix (global) de ω. ~~C'est u~~

On obtient ainsi un ~~alg~~ faisceau d'algèbres de Lie DG.

c) Prenant le complexe $\bar\partial$ et les sections globales, on obtient enfin une algèbre de Lie DG $\mathcal{L}$. ~~Une fois choisi ω~~, Son H^i est le $H^{N+i-1}(X, \mathbb{C}) \otimes H^0(X, \Omega^N)^\vee$

Questions (i) Pour $\ell \in (\mathcal{L} \otimes m)^1$, $d\ell + \frac{1}{2}[\ell, \ell] = 0$, les
$H^*(\mathcal{L} \otimes \Lambda, d + \mathrm{ad}\,\ell)$
sont-ils libres sur Λ ?

(ii) Le foncteur $\Lambda \mapsto$
$\{\ell \in (\mathcal{L} \otimes m)^1, d\ell + \frac{1}{2}[\ell, \ell] = 0\} / \{\text{action de } \mathcal{L}^0 \otimes m \text{ comme avant}\}$
est-il ~~represen~~ prorepresentable, non obstrué

(iii) Comment interpréter, et comment s'écrire, l'espace formel de modules.

Bien à toi

P. Del

P. DELIGNE

Cher Breen,

J'aurais dû réfléchi mieux avant d'expliquer une partie de ce que fait Ran.

L'algèbre de Lie DG $\overset{1-i}{\wedge} T$ est (une choix de ω trivialisant Ω_X ayant été fait) quasi-isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}[1-N]$ avec $[\,,\,]=0$, par le morphisme

$$\underline{\mathbb{C}}[1-N] \hookrightarrow (\overset{1-*}{\wedge} T) \approx \Omega^*[N-1].$$

En toute justice, l'algèbre de Lie DG $R\Gamma(X, \overset{1-*}{\wedge} T)$, calculée avec une résolution $\Im$, doit donc être quasi-isomorphe à une algèbre de Lie DG avec $[\,,\,]=0$. Pour les questions que je posais à la fin, ~~cela~~ invariantes par quasi-isomorphisme, cela donne oui pour (i)(ii), et l'espace formel de modules est canoniquement isomorphe au complété à l'origine de l'espace $H^N(X,\mathbb{C}) \otimes H^0(X,\Omega^N)^\vee$.

L'algèbre de Lie DG admet comme sous-algèbre de Lie DG $\sigma_{\geq 0} \overset{1-*}{\wedge} T$: $T' \xrightarrow{d} \mathcal{O}$ (où d est la "divergence").
Cette sous-algèbre $\overset{\text{après } R\Gamma}{\vee}$ contrôle les déformations de (X muni de ω).
Elle a comme quotient T' en degré 0, contrôlant $\overset{\text{après } R\Gamma}{\vee}$ les déformations de X.

$$(1) \qquad R\Gamma(\overset{1-*}{\wedge} T) \longleftarrow R\Gamma(\sigma_{\geq 0} \overset{1-*}{\wedge} T) \longrightarrow R\Gamma(T')$$

Lemme Soit $g \to h$ un morphisme d'algèbre différentielles graduées, d'où un foncteur entre les problèmes de déformation correspondant $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.

(i) Si $\mathcal{H}$ est non obstrué et que $H^2(g) \hookrightarrow H^2(h)$, alors $\mathcal{G}$ est non obstrué.

(ii) Si $\mathcal{G}$ est non obstrué et que $H^1(g) \twoheadrightarrow H^1(h)$, alors $\mathcal{H}$ est non obstrué.

Preuve (i) vient de la fonctorialité des obstructions aux déformations.

(ii) Dans la déformation verselle (lisse) pour $\mathcal{G}$, on peut trouver un sous-espace lisse qui donne une déformation pour $\mathcal{H}$ dont l'espace tangent à l'origine est $H^1(h)$.

Appliquant le lemme à (i), on redémontre que l'espace des déformations d'une Calabi Yau [car 0] est non obstrué. Est-ce une preuve connue déguisée ?

Il me reste à justifier l'usage trop libre fait de "$R\Gamma$". Le plus naturel serait Čech + une machine transformant semi-simplicial ~~DG Lie~~ en DG Lie en DG Lie.
Je manque de référence, mais on peut définir

(a) les flèches dans (i), en calculant $R\Gamma$ par Γ(complexe $\bar{\partial}$)

(b) un quasi-isomorphisme du type voulu, pour

$\Gamma(X$, complexe $\bar{\partial}$ de $\overset{1-*}{\wedge} T)$, comme suit :

• Sur X, on considère [toujours à co choix]

$$\mathcal{O}[N-1] \longrightarrow jet_\infty(\overset{1-*}{\wedge} T)$$

un quasi-isomorphisme, par le lemme de Poincaré formel. Les morphismes sont compatibles aux connexions de $\mathcal{O}$ et des fibrés des jet$_\infty$, d'où, sur X encore des quasi-isomorphismes

$$\underbrace{\Omega^{*}[N-1]}_{\text{degrés }(1-N,*)} \longrightarrow \underbrace{\Omega^{*_2}\, jet_\infty(\overset{1-*_1}{\Lambda} T)}_{\text{complexe double}} \longleftarrow \underbrace{\overset{1-*}{\Lambda} T}_{\text{degré }(*,0)}$$

$[\,,\,]=0$

Prenant maintenant les sections globales du complexe δ, on obtient ce qui était promis.

<u>Rmq</u> : Le morphisme d'algèbre de Lie DG

$$R\Gamma(\sigma_{\geq 0} \overset{1-*}{\Lambda} T) \longrightarrow R\Gamma(\overset{1-*}{\Lambda} T)$$

fournit, par passage aux espace formel de modules, un morphisme

(espace formel de modules des déformations de X muni de ω)

$\downarrow$

(complété formel à l'origine de $H^{N-1}(X, \mathbb{C})$)

avec pour espace tangent F^{N-1} à l'origine.

<u>Qu</u> Est-ce bien déformation $(X_1, \omega_1) \longmapsto$ classe de $[\omega_1]$ - classe de $[\omega]$, en cohomologie ?

Bien à toi

P. Deligne

P. DELIGNE