INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

INTEGRALES Y FUNCIONES ELÍPTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A

ALONSO DELFÍN ARES DE PARGA

ASESOR: DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

REVISOR: DR. CESAR LUIS GARCÍA GARCÍA

MÉXICO, D.F. 2014

Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada **"INTEGRALES Y FUNCIONES ELÍPTICAS"**, otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación.

ALONSO DELFÍN ARES DE PARGA

FECHA

FIRMA

Dedicado a la memoria
de mi abuela Meche y
de mi abuelo Gonzalo

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente al Dr. Guillermo Grabinsky Steider, no sólo por su inmensa colaboración para la escritura de esta tesis, si no también, por todo lo que de él he aprendido a lo largo de mi carrera y por ser para mí un modelo a seguir. Fue para mí un honor poder aprender del profesor Grabinsky sobre matemáticas, en particular de variable compleja, pero también de muchas cosas más como música, cine mudo y fotografía antigua; escribir esta tesis con él fue una experiencia extraordinaria.

Agradezco a mis tres sinodales, los profesores Juan Carlos Aguilar, César Luis García y David Fernández, por su gran dedicación al leer este trabajo y principalmente por las correcciones y observaciones hechas al mismo, las cuales mejoraron la calidad y claridad de manera significativa.

Con esta tesis concluye un ciclo más de mi educación, cierro este capítulo con un profundo agradecimiento a toda mi familia por su apoyo mostrado durante estos largos años, sobre todo hacia mis papás y mis hermanos Duca y Toco, pero en especial quiero agradecer a mi mamá quien siempre vio por mi educación y me apoyó en esos momentos donde todo parecía salirse de control, en gran parte le debo a ella el estar concluyendo mi licenciatura.

Hace ya un poco más de 7 años emprendí un viaje en esta vida junto con Antonella, un viaje que hoy continua y sé que continuará para siempre y por el cual le estoy infinitamente agradecido, le agradezco su apoyo incondicional y su gran paciencia a lo largo de toda mi carrera. No puedo imaginar mi vida sin ella y hoy cerramos este ciclo para continuar por el camino que juntos escogimos.

En general estoy en deuda con todos los profesores de los que tanto he aprendido en mi vida, en el ITAM tuve la suerte de tener excelentes profesores, en particular quiero agradecer a Juan Carlos Aguilar, Javier Alfaro, Vladimir Caetano, Ramón Espinosa, David Fernández, César Luis García, Mauricio García, Marcela González, Guillermo Grabinsky, Jesús Luque, Rafael Morones, Zeferino Parada, Guillermo Pastor y Rafael Ramos del Departamento de Matemáticas; a Ernesto Barrios y Alberto Tubilla del Departamento de Estadística; a Rafael González y Patricio Sepúlveda del Departamento de Estudios Generales; y finalmente a Ángel Kuri del Departamento de Computación, por todos los excelentes cursos que tomé con ellos, los cuales me dejan una marca de por vida.

Finalmente quiero agradecer el apoyo de todos mis amigos, sus palabras y apoyo constante son invaluables, en particular quiero agradecer el apoyo que me dieron todos mis amigos del ITAM para la realización de este trabajo, su interés y sus preguntas siempre fueron un motor para mí.

Índice general

Agradecimientos iii

Índice general v

Índice de figuras vii

Glosario de símbolos ix

Introducción 1

1. Funciones Simplemente Periódicas 5
1.1. Funciones de Variable Compleja 5
1.2. Funciones Periódicas 6
1.3. Serie de Fourier 8

2. Origen de las Integrales Elípticas 17
2.1. Integrales Elípticas 17
2.2. La Lemniscata 19
2.3. La Función Lemniscata en $\mathbb{R}$ 23

3. Funciones Doblemente Periódicas 43
3.1. Un Teorema de Jacobi 43
3.2. Funciones Elípticas 47
3.3. Los Teoremas de Liouville 52

4. Teoría de Weierstrass 61
4.1. Preliminares 61
4.2. Función $\wp$ de Weierstrass 67
4.3. Dos Casos Particulares de la Función $\wp$ 77

5. Relación con Integrales Elípticas 89
5.1. La Ecuación Diferencial para la función $\wp$ 89
5.2. Inversión de Integrales Elípticas 94

6. Funciones Elípticas Arbitrarias **105**
6.1. Funciones Elípticas en términos de $\wp$ y $\wp'$ 105
6.2. Función $\boldsymbol{\zeta}$ de Weierstrass 109
6.3. Función $\boldsymbol{\sigma}$ de Weierstrass 114
6.4. Funciones Elípticas Arbitrarias en términos de $\boldsymbol{\sigma}$ y en términos de $\boldsymbol{\zeta}$ 118

7. Más propiedades de las Funciones Elípticas **123**
7.1. Teoremas de Adición 123
7.2. Relaciones de homogeneidad 133
7.3. Parciales con respecto a los periodos e invariantes 134

8. La Función Lemniscata en $\mathbb{C}$ **143**
8.1. Extensión de $\boldsymbol{\varphi}_l$ a $\mathbb{C}$ 143
8.2. El Teorema de Abel 149
8.3. Relación entre $\boldsymbol{\varphi}_l$ y $\wp$ 150

A. Series de Taylor y de Laurent **159**

B. Teoremas **161**

C. Una Serie Divergente **165**

D. Cambios de Variable **167**

E. Construciones con Regla y Compás **171**

Bibliografía **173**

Índice de figuras

1.1. Teorema 1.2 8

2.1. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 19
2.2. $r^2 = \cos(2\theta)$ 20
2.3. División de la lemniscata 20
2.4. $r = \sqrt{cos(2\theta)}$ 21
2.5. Variación de π 22
2.6. $s \geq 0$ y $s < 0$ 24
2.7. Propiedades de φ_l 26
2.8. Giulio Carlo di Fagnano 29
2.9. $r = cos(\theta)$ 30
2.10. $n = 8$ 33
2.11. $n = 6$ 36
2.12. $n = 5$ 42

3.1. Carl G. J. Jacobi 43
3.2. Teorema 3.1 44
3.3. Paralelogramo Fundamental 49
3.4. Ejemplo de Δ y $\widetilde{\Delta}$ 50
3.5. Joseph Liouville 52
3.6. Δ y Δ' 54

4.1. Karl Weierstrass 61
4.2. P_k con $k = 1, 2, 3$ 62
4.3. Letra $\wp$ 67
4.4. Valores de $\wp$ en Δ 76
4.5. Mapeo de $\wp(z|\alpha, i\beta)$ 81
4.6. Valores reales de $\wp(z|\alpha, i\beta)$ 83
4.7. Paralelogramo fundamental cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ 84
4.8. Valores reales de $\wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ 87

5.1. $A_{0,R}(0)$ 90

6.1. Δ y Δ' para ζ 112

8.1. Δ_l 151
8.2. Polos y Ceros en Δ_l 155

Glosario de símbolos

$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos	**(p.5)**
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}\backslash\{0\}$	**(p.9)**
$\widehat{\mathbb{C}}$	La Esfera de Riemann $\equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	**(p.56)**
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales	**(p.8)**
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros	**(p.6)**
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales	**(p.6)**
Ω	Conjunto de todos los periodos de una función elíptica	**(p.47)**
Δ	Paralelogramo fundamental de una función elíptica	**(p.48)**
$\Delta_{m,n}$	Traslaciones del paralelogramo fundamental	**(p.49)**
P_l	Conjunto de polos de la función φ_l	**(p.144)**
Ω_l	Conjunto de periodos de la función φ_l	**(p.148)**
Δ_l	Paralelogramo fundamental de φ_l	**(p.150)**
$\overline{A}$	Cerradura del conjunto A	**(p.12)**
∂A	Frontera del conjunto A	**(p.54)**
A^o	Interior del conjunto A	**(p.75)**
A'	Puntos de acumulación del conjunto A	**(p.146)**
γ	Parametrización de una curva	**(p.48)**
$int(\gamma)$	Interior de una curva <u>cerrada</u> parametrizada	**(p.48)**
$[z \to w]$	Segmento de recta que une a z con w ambos incluidos	**(p.7)**
$(z \to w)$	Segmento de recta que une a z con w ambos excluidos	**(p.82)**
$[z \to w)$	Segmento de recta que une a z con w sin incluir a w	**(p.49)**
$(z \to w]$	Segmento de recta que une a z con w sin incluir a z	**(p.86)**
$f(A)$	Imagen directa del conjunto A bajo la función f	**(p.9)**
$R(u)$	$R(u) = Q(u)/P(u)$ con $Q, P \in \mathbb{C}[u]$	**(p.105)**
$R(u,v)$	$R(u,v) = Q(u,v)/P(u,v)$ con $Q, P \in \mathbb{C}[u,v]$	**(p.17)**

G_n	Serie de Eisenstein	**(p.89)**
$\wp$	Función elíptica $\wp$ de Weierstrass	**(p.69)**
$\wp(z\|\omega_1,\omega_3)$	Notación de $\wp$ enfatizando dependencia en ω_1,ω_3	**(p.77)**
$\wp(z\|g_2,g_3)$	Notación de $\wp$ enfatizando dependencia en g_2,g_3	**(p.103)**
$\wp(z\|\Omega)$	Notación de $\wp$ enfatizando dependencia en Ω	**(p.133)**
ζ	Función ζ de Weierstrass	**(p.109)**
σ	Función σ de Weierstrass	**(p.114)**
φ_l	Función Lemniscata	**(p.24)**
$ord(f,\Delta)$	Orden de una función elíptica f	**(p.53)**
$2\omega_j$	para $j=1,3$ periodos fundamentales de una función elíptica	**(p.43)**
ω_j	para $j=1,2,3$ son los medios periodos de una función elíptica	**(p.74)**
e_j	para $j=1,2,3$ $e_j=\wp(\omega_j)$	**(p.74)**
g_j	para $j=2,3$ son los invariantes de la función $\wp$	**(p.92)**
$n(a)$	Cantidad de a-puntos en Δ	**(p.57)**
$s(a)$	Suma de los a-puntos en Δ	**(p.58)**
q.e.d	"*quod erat demonstrandum*" indica el fin de una prueba	**(p.7)**
$\forall$	abreviación de "*para todo*"	**(p.5)**
$\mathfrak{Re}(z)$	Parte Real de $z\in\mathbb{C}$	**(p.43)**
$\mathfrak{Im}(z)$	Parte Imaginaria de $z\in\mathbb{C}$	**(p.43)**
$\overline{z}$	Conjugado complejo de $z\in\mathbb{C}$, $\overline{z}=\mathfrak{Re}(z)-i\mathfrak{Im}(z)$	**(p.45)**
$\|z\|$	Modulo complejo de $z\in\mathbb{C}$, $\|z\|=\sqrt{(\mathfrak{Re}(z))^2+(\mathfrak{Im}(z))^2}$	**(p.7)**
$arg(z)$	Argumento $z\in\mathbb{C}$, $z=\|z\|e^{i\cdot arg(z)}$	**(p.101)**
$\lfloor t\rfloor$	función piso de $t\in\mathbb{R}$, $\lfloor t\rfloor=\text{máx}\{n\in\mathbb{Z}:n\leq t\}$	**(p.45)**
$z_1\equiv z_2$	congruencia módulo Ω	**(p.49)**
$\exp(z)$	Función exponencial, $\exp(z)=e^z$	**(p.114)**
$det(A)$	Determinante de la matriz A	**(p.46)**
$\sum'$	Suma perforada	**(p.62)**
$\prod'$	Producto perforado	**(p.114)**

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar un análisis detallado acerca de las funciones periódicas de variable compleja. Para ello, presentaremos las distintas clases de funciones periódicas que existen, las simplemente periódicas y las doblemente periódicas. Principalmente nos enfocaremos en la clase de las funciones doblemente periódicas, llamadas elípticas, por lo que ocuparan la mayor parte de nuestra atención, ya que guardan una relación de importancia con las integrales elípticas, de las cuales reciben su nombre. La tesis está orientada a alumnos que hayan cursado un curso introductorio de variable compleja, sin embargo el lector podrá apreciar que los temas tratados guardan cierta relación con el álgebra. Esto es debido a que dos grandes aplicaciones de la funciones elípticas son de corte algebraico, por un lado son de gran utilidad en el campo de la teoría analítica de los números, y por otro son un una base del tratamiento de las curvas elípticas y de las formas modulares.

El inicio de cada capítulo está acompañado de un breve resumen acerca de lo que se tratara en él. Aunado a esto, presentamos a continuación un párrafo para cada capítulo, que describe en esencia el tema principal del capítulo y la relación que éste pudiera guardar con otras secciones del texto.

Para comenzar, el Capítulo 1 trata acerca de las funciones simplemente periódicas, se introducen las definiciones básicas que se ocuparan a lo largo del texto y los resultados más importantes de la clase de las funciones periódicas de variable compleja. Es un capítulo corto y sencillo que pretende recordar al lector aspectos que probablemente ya le sean conocidos.

El Capítulo 2 es una continuación del primero, ya que en éste se presenta un caso particular de una función periódica de variable real, la función lemniscata φ_l, haremos mucho énfasis en la gran similitud entre φ_l y la función trigonométrica *seno*. Sumado a esto, el segundo capítulo del texto tiene un corte histórico, ya que en él, presentamos el origen de la integrales elípticas y junto a esto el primer vistazo que tendrá el lector acerca de la relación que guardan las funciones periódicas con dichas integrales, una relación que estará muy presente en todo el texto. Al terminar la lectura de este capítulo, podría parecer que el tema de la lemniscata queda de cierta forma inconcluso, esto se debe a que para concluirlo de manera definitiva es necesario tener un conocimiento más amplio de las funciones elípticas, por lo que el capítulo final retoma a la función lemniscata para así concluir con el tema.

Consideramos al Capítulo 3 como el capítulo fundamental de este trabajo, pues en el exponemos las bases teóricas de las funciones doblemente periódicas, particularmente de las elípticas. El lector encontrará en este capítulo toda la información necesaria acerca de una función elíptica en abstracto, y de manera cotidiana estaremos haciendo referencia a los resultados aquí tratados en los capítulos posteriores. Sin embargo, todo el tercer capítulo es simplemente un puente para el cuarto en el cual encontraremos las aplicaciones de dichos resultados.

Así pues, el Capítulo 4 es la aplicación de los resultados obtenidos en su predecesor. Se presenta la forma explícita de una función elíptica, la función $\wp$ de Weierstrass, la cual juega un rol fundamental para la clase de funciones elípticas. El lector notará que los capítulos subsecuentes se ocupan de extender toda la teoría obtenida para la $\wp$. Presentamos las propiedades, las notaciones básicas y casos particulares de interés de dicha función, por lo que también en lo que sigue del texto, haremos varias referencias a los temas tratados en este capítulo.

El siguiente capítulo, Capítulo 5, trata acerca de la relación entre las integrales elípticas y las funciones elípticas, de la cual el lector tuvo ya una probada en el segundo capítulo. Aquí se presenta una ecuación diferencial de primer orden que satisface la función $\wp$ que no sólo es esencial para establecer la relación en cuestión, sino que también es una propiedad de gran importancia, a la cual recurriremos en múltiples ocasiones para la demostración de otros resultados.

En el Capítulo 6 nos desviamos un poco de las integrales elípticas, para continuar con el análisis de las funciones elípticas. Presentamos aquí tres maneras distintas para escribir cualquier función elíptica dada en términos de la función $\wp$ y de dos funciones auxiliares ζ y σ, definidas también por Weierstrass, que a pesar de no ser elípticas ni periódicas son de gran ayuda para establecer varios resultados en capítulos posteriores.

El lector está familiarizado con las identidades que guardan las funciones periódicas de variable real, compleja y gracias al capítulo 2, la función φ_l. El Capítulo 7 pretende en primer lugar introducir el análogo a dichas identidades para el caso de las funciones elípticas, en particular para la función $\wp$ gracias a la relación que tiene ésta con cualquier otra función elíptica. En segundo lugar, es un capítulo diseñado para extender el conocimiento de la función $\wp$, pues presentamos propiedades y notaciones adicionales de gran interés acerca de $\wp$ y más aún algunas de estas propiedades serán de gran utilidad para el capítulo final.

Finalmente, como habíamos adelantado, el Capítulo 8 pretende continuar con lo que dejamos inconcluso en el segundo capítulo. En este capítulo veremos que la función lemniscata φ_l es una función elíptica y demostraremos la relación que ésta guarda con la función $\wp$. Una característica del capítulo final, es que utilizamos sin excepción alguna resultados obtenidos en los siete capítulos anteriores, por lo que es una manera muy elegante de terminar la tesis, sintetizando todo el conocimiento obtenido a lo largo de ésta.

Para facilitar la lectura, al inicio del texto se presenta un Glosario de Símbolos, que contiene la mayoría de los símbolos que aparecen en el texto seguidos de una breve descripción y del número de página donde se definen por primera vez, o en su defecto donde se ocupan por primera vez a lo largo del texto. De igual manera, dado que la tesis contiene un gran número de figuras que ayudan a ejemplificar la teoría, después del Glosario de Símbolos se encuentra el Índice de figuras que presenta el título de todas las figuras acompañado de la página en la que se encuentra cada una.

Al final de la tesis se presentan en total cinco apéndices. En primer lugar el Apéndice A presenta un breve resumen de las Series de Taylor y de Laurent, que son una herramienta fundamental para el análisis complejo y no será la excepción en este caso. El Apéndice B presenta en su gran mayoría los teoremas básicos de un curso introductorio de variable compleja, a los cuales recurrimos en varias demostraciones en todos los capítulos, y aunque dichos resultados no están demostrados, al final del enunciado el lector encontrara una referencia donde puede consultar la prueba. El Apéndice C presenta la prueba la divergencia de una serie, que justifica por que usamos una estimación particular para ver la convergencia una suma de series en el texto. En el Capítulo 5 utilizamos dos cambios de variable de integración que requieren una manipulación algebraica tediosa, en caso de que el lector esté interesado en dicha manipulación ésta se presenta en el Apéndice D. Finalmente el Apéndice E, da una breve explicación acerca de la teoría de los números construibles con regla y compás, teoría que se usa de manera constante en el estudio de la lemniscata del Capítulo 2.

Capítulo 1

Funciones Simplemente Periódicas

Para un análisis adecuado de las funciones periódicas de variable compleja es necesario recordar algunas definiciones de las funciones complejas.

1.1. Funciones de Variable Compleja

Definición 1.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una* ***función analítica*** *en U, si f es diferenciable en z_0 $\forall z_0 \in U$. Si $U = \mathbb{C}$ entonces decimos que f es una* ***función entera****.*

Un teorema de gran importancia en variable compleja da una caracterización alternativa para las funciones analíticas, que es: f es una función analítica en U si para todo $z_0 \in U$, f es infinitamente diferenciable en z_0 y su serie de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de U y coincide con f alrededor de z_0 (para una demostración de la equivalencia ver [18] Parte I, teoremas 1.2, 16.4 y 16.7)

Es natural pensar en las funciones analíticas como las funciones ideales para el análisis de variable compleja, por lo que a continuación se define una clase de funciones que se puede ver como la de las funciones "casi analíticas".

Definición 1.2. *Sea U un subconjunto abierto de números complejos, decimos que una función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una* ***función meromorfa*** *en U si f es analítica en todo U excepto en $P = \{z_j : j \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subset U$, donde para cada $j \in I$, los z_j son puntos aislados llamados polos de f.*

Una caracterización alternativa es: f es una función meromorfa en U si existen funciones analíticas, g y h, en U tales que $f(z) = g(z)/h(z)$, donde los polos de f corresponden a los ceros de h (ver [18] Parte I p.160).

1.2. Funciones Periódicas

A continuación se presenta un breve recordatorio de la definición de función periódica y algunos resultados básicos de estas funciones:

Definición 1.3. *Decimos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una **función periódica** si existe $\omega \in \mathbb{C}$ con $\omega \neq 0$ tal que para toda $z \in \mathbb{C}$ sucede que:*

$$f(z + \omega) = f(z)$$

*Al número complejo ω lo llamamos un **periodo** de la función f.*

Observación 1.1. Notamos que si f tiene un polo de orden k en z_0 y ω es un periodo, entonces f tiene un polo de orden k en $z_0 + \omega$, ya que haciendo $u = z - \omega$ tenemos que:

$$\lim_{z \to z_0 + \omega} (z - (z_0 + \omega))^k f(z) = \lim_{u \to z_0} (u - z_0)^k f(u + \omega) = \lim_{u \to z_0} (u - z_0)^k f(u) \neq 0, \infty.$$

La observación anterior debe ser tomada en cuenta ya que es de suma importancia para los capítulos posteriores.

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica con periodos $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ entonces si $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se tiene que $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j \omega_j$ es un periodo de f.*

Demostración:
Inducción sobre n. Para el caso $n = 1$ tenemos que verificar que $m_1\omega_1$ es un periodo de f para todo $m_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y lo haremos por inducción sobre m_1, el caso $m_1 = 1$ está dado por hipótesis, si suponemos la hipótesis de inducción de que $m_1\omega_1$ es un periodo vemos que si $z \in \mathbb{C}$ entonces:

$$f(z + (m_1 + 1)\omega_1) = f(z + \omega_1 + m_1\omega_1) = f(z + \omega_1) = f(z)$$

Luego $m_1\omega_1$ es un periodo para todo $m_1 \in \mathbb{N}$, pero vemos que $-\omega_1$ también es un periodo de f ya que $f(z) = f(z + \omega_1 - \omega_1) = f(z - \omega_1)$, lo que asegura que $m_1\omega_1$ es un periodo para todo $m_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por lo tanto para el caso $n = 1$ se cumple el teorema, suponemos nuestra hipótesis de inducción de que $\sum\limits_{j=1}^{n-1} m_j\omega_j$ es un periodo y vemos que si $z \in \mathbb{C}$ entonces:

$$f(z + \sum_{j=1}^{n} m_j\omega_j) = f(z + m_n\omega_n + \sum_{j=1}^{n-1} m_j\omega_j) = f(z + m_n\omega_n) = f(z)$$

donde la justificación para la última igualdad es análoga a la de ver que $m_1\omega_1$ es periodo para todo $m_1 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
Por lo tanto concluimos que: para toda $n \in \mathbb{N}$, si $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ entonces se cumple que $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\omega_j$ es un periodo de f. **q.e.d**

El Teorema 1.1 nos asegura que cualquier función periódica tiene una infinidad de periodos distintos, aunque no nos dice nada de posibles relaciones entre dichos periodos. Para las funciones meromorfas y periódicas es posible identificar un tipo de periodos particulares, que llamaremos **periodos fundamentales** de f, cuya existencia, propiedades y relación con los demás periodos de f se prueban a continuación:

Lema 1.1. *Sea f una función meromorfa, periódica y no constante, sea Ω el conjunto de todos los periodos de f, entonces Ω no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.*

Demostración:
En un primer caso si Ω está contenido en el conjunto de polos de f, esto implicará que los puntos de Ω son aislados y por lo tanto que no tiene puntos de acumulación. Supongamos entonces que Ω tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$ y que los puntos de Ω no son polos de f, por lo que:

$$f(\omega) = f(0+\omega) = f(0) \ \forall \ \omega \in \Omega$$

es decir que $f(\omega) = f(0) \ \forall \ \omega \in \Omega$, pero por el Teorema B.1 (Unicidad Global) del Apéndice B, como Ω tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$ se sigue que $f(z) = f(0) \ \forall z \in \mathbb{C}$, lo que implica que f es una función constante, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto el conjunto Ω no puede tener puntos de acumulación en $\mathbb{C}$ **q.e.d**

Teorema 1.2. *Sea f una función meromorfa, periódica y no constante y sea $\omega \in \mathbb{C}$ un periodo de f entonces la recta $\mathcal{L}$ que pasa por 0 y por ω contiene a un número complejo $\omega_1 \neq 0$ que es un periodo de f tal que todo periodo de f contenido en $\mathcal{L}$ es de la forma $m\omega_1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Decimos que ω_1 es un **periodo fundamental** de la función f.*

Demostración:
Por el Lema 1.1 el segmento de recta que une al punto 0 con el punto ω contiene únicamente una cantidad finita de periodos de f, sea ω_1 el más cercano al origen (podría ser que el periodo más cercano fuera ω y en ese caso $\omega_1 = \omega$).
Denotamos al segmento de recta que une al punto 0 con el punto ω_1 como $[0 \to \omega_1]$. Notamos que $[0 \to \omega_1]$ solamente contiene a ω_1 como periodo de f. Ahora supongamos que en $\mathcal{L}$ esta contenido ω' un periodo de f que no es múltiplo entero de ω_1, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que ω' está contenido en el segmento $[m\omega_1 \to (m+1)\omega_1]$, así pues:

$$0 < |\omega' - m\omega_1| < |\omega_1|$$

Por lo que $\omega' - m\omega_1$ se encuentra contenido en $[0 \to \omega_1]$, pero por el Teorema 1.1, $\omega' - m\omega_1$ es un periodo de f, lo que es imposible pues ya vimos que no existen periodos distintos a ω_1 en $[0 \to \omega_1]$. **q.e.d**

La siguiente figura ilustra la demostración del Teorema 1.2

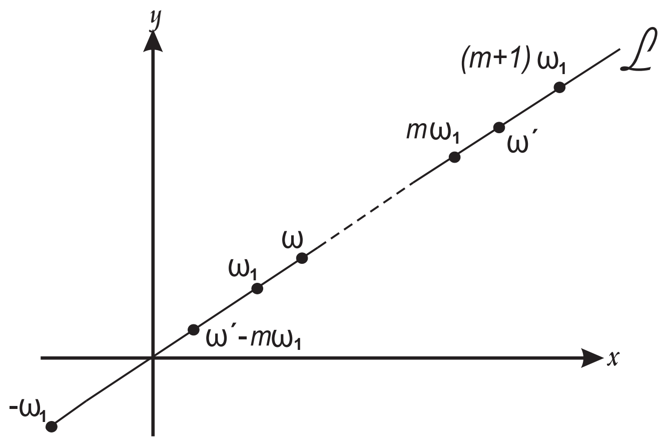


Figura 1.1: Teorema 1.2

Observación 1.2. Notamos que si ω_1 es un periodo fundamental para una función periódica f, entonces necesariamente $-\omega_1$ también es un periodo fundamental para f y que no hay más periodos fundamentales en la recta $\mathcal{L}$ que pasa por 0 y ω_1.

Definición 1.4. *Decimos que una función periódica f con periodo fundamental ω_1, dado por el Teorema 1.2, es* ***simplemente periódica*** *si todos sus periodos son de la forma $m\omega_1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Es decir todos sus periodos están contenidos en la recta que pasa por 0 y ω_1.*

Ejemplo 1.1. La función $f(z) = e^z$ es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$, ya que si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$e^z = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$$

La periodicidad se sigue del hecho que $\cos(y)$ y $\operatorname{sen}(y)$ son funciones reales, simplemente periódicas con periodo fundamental 2π. Además si ω es cualquier periodo de e, como e^x no es periódica para $x \in \mathbb{R}$, es claro que ω es un imaginario puro, por lo que tendremos que ω/i será un periodo de la funciones trigonométricas *seno* y *coseno* y por ende los únicos periodos de la función exponencial son de la forma $\omega = m2\pi i$, con $m \in \mathbb{Z}$, quedando demostrado que es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$

1.3. Serie de Fourier

Supongamos ahora que tenemos una función simplemente periódica f, con ω_1 un periodo fundamental. No hay pérdida de generalidad al decir que $\omega_1 = 2\pi$, ya que si $g(u)$ es una función con periodo $\omega_1 \neq 2\pi$, haciendo el cambio de variable:

$$u = \frac{\omega_1}{2\pi} z$$

obtenemos que :

$$f(z) = g\left(\frac{\omega_1}{2\pi} z\right)$$

es en efecto una función periódica de periodo 2π. En el caso real esta transformación se puede interpretar geométricamente, pues si $\omega_1 > 2\pi$ entonces estamos comprimiendo la gráfica para que obtenga el periodo deseado pero sin alterar su imagen y si por el contrario $\omega_1 < 2\pi$ estamos estirando la gráfica hasta que obtenga a 2π como periodo y nuevamente sin afectar su imagen.
Dicho esto, podemos enunciar, remplazando 2π por cualquier periodo, los siguientes teoremas que son de gran importancia para el análisis de las funciones simplemente periódicas (aunque para que se cumplan no es estrictamente necesario que la función sea simplemente periódica, ya que, es suficiente tener que es periódica).

Teorema 1.3. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, periódica de periodo 2π, entonces la función $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ dada por:*

$$f^*(\zeta) = f\left(\frac{\ln(\zeta)}{i}\right) \tag{1.1}$$

es una función meromorfa en $\mathbb{C}^*$. Además $f^*(\zeta)$ tiene el mismo número de polos y con mismo orden que los polos de $f(z)$.

Demostración:
En primer lugar notamos que $f^*(\zeta)$ es una función univaluada, ya que para cada $\zeta \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $\ln(\zeta)$ toma una infinidad (numerable) de valores que difieren entre sí por múltiplos de $2\pi i$, luego los valores de $\ln(\zeta)/i$ difieren entre sí por múltiplos de 2π. Como f tiene periodo 2π entonces para cada $\zeta \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $f(\ln(\zeta)/i)$ toma un valor único y por lo tanto $f^*(\zeta)$ es univaluada.

Sea z_0 algún valor de $\ln(\zeta)/i$, por lo tanto existe $\zeta_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $z_0 = \ln(\zeta_0)/i$. Tomemos a U_{ζ_0} una vecindad abierta del punto ζ_0 tal que $\ln(\zeta)/i$ sea univaluada para toda $\zeta \in U_{\zeta_0}$ y definimos la función, $\varphi_0 : U_{\zeta_0} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{\ln(\zeta)}{i}.$$

Por construcción tenemos que φ_0 es analítica en U_{ζ_0} y que $\varphi_0(\zeta_0) = z_0$. Pero f puede ser analítica en z_0 o tener un polo en z_0:

a) Si f es analítica en z_0:
Como φ_0 es analítica, en virtud del Teorema B.2 (Mapeo Abierto) del Apéndice B, podemos escoger a la vecindad abierta U_{ζ_0} lo suficientemente pequeña tal que $V_{z_0} = \varphi_0(U_{\zeta_0})$ sea una vecindad abierta de z_0 en la cual f es analítica, es decir V_{z_0} no contiene a ningún polo de f. Por lo tanto $f^*(\zeta) = f(\varphi_0(\zeta))$ es composición de funciones analíticas y por lo tanto es analítica para toda $\zeta \in U_{\zeta_0}$.

b) Si z_0 es un polo de f:
Al igual que en a), podemos escoger a la vecindad abierta U_{ζ_0} lo suficientemente pequeña tal que $V_{z_0} = \varphi_0(U_{\zeta_0})$ sea una vecindad abierta de z_0 en la cual el único polo de f es z_0, es decir f es analítica en $V_{z_0} \setminus \{z_0\}$. Por lo tanto $f^*(\zeta) = f(\varphi_0(\zeta))$ es una función analítica en $U_{\zeta_0} \setminus \{\zeta_0\}$ y además como z_0 es un polo de f tenemos que:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

$$\text{entonces} \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} f^*(\zeta) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\varphi_0(\zeta)) = \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

por lo que concluimos que ζ_0 es un polo de f^*

Si el orden del polo z_0 es k, entonces por la serie de Laurent (ver Apéndice A), tenemos que $b_k \neq 0, \infty$ donde b_k es el $k - esimo$ coeficiente de la parte principal de la serie y :

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = b_k$$

$$\text{entonces} \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^k f^*(\zeta) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{(z - z_0)^k f(z)}{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - \zeta_0}\right)^k} = \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{(z - z_0)^k f(z)}{\left(\frac{\varphi_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}\right)^k} = \frac{b_k}{(\varphi_0'(\zeta_0))^k}$$

Pero como

$$\varphi_0'(\zeta_0) = \frac{d}{d\zeta}(\varphi_0(\zeta))\Big|_{\zeta = \zeta_0} = \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\ln(\zeta)}{i}\right)\Big|_{\zeta = \zeta_0} = \frac{1}{i\zeta_0}$$

Y como $\zeta_0 \neq 0$ ya que pertenece a $\mathbb{C}^*$ tenemos que :

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^k f^*(\zeta) = \frac{b_k}{(\varphi_0'(\zeta_0))^k} = b_k \cdot (i\zeta_0)^k \neq 0, \infty$$

Por lo tanto ζ_0 es un polo de orden k para f^*.

Concluimos que a todo punto en $\mathbb{C}$ en donde f sea analítica le asociamos un punto en $\mathbb{C}^*$ para el cual f^* es analítica y además a todo polo z_0 de f le asociamos el polo de mismo orden ζ_0 de f^* tal que $\varphi_0(\zeta_0) = z_0$, por lo que f^* es analítica en todo $\mathbb{C}^*$ excepto en dichos polos, lo que implica que es una función meromorfa en $\mathbb{C}^*$ con el mismo número de polos y con el mismo orden que f.

q.e.d

El siguiente teorema es un recíproco para el Teorema 1.3:

Teorema 1.4. *Sea $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en $\mathbb{C}^*$, entonces la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:*

$$f(z) = f^*(e^{iz}) \tag{1.2}$$

Es una función periódica con periodo 2π y meromorfa en $\mathbb{C}$.

Demostración:
Tenemos que $f(z+2\pi) = f^*(e^{i(z+2\pi)}) = f^*(e^{iz+2\pi i}) = f^*(e^{iz}) = f(z)$, y por lo tanto f es una función periódica con periodo 2π.

Sea ζ_0 algún valor de e^{iz}, por lo tanto existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta_0 = e^{iz_0}$. Tomemos a V_{z_0} una vecindad abierta del punto z_0 y definimos la función, $\psi_0 : V_{z_0} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\psi_0(z) = e^{iz}$$

Por construcción tenemos que ψ_0 es analítica en V_{z_0} y que $\psi_0(z_0) = \zeta_0$. Pero f^* puede ser analítica en ζ_0 o tener un polo en ζ_0:

a) Si f^* es analítica en ζ_0:
Ya que ψ_0 es analítica, de nuevo por el Teorema B.2 (Mapeo Abierto) del Apéndice B, podemos escoger a la vecindad abierta V_{z_0} lo suficientemente pequeña tal que $U_{\zeta_0} = \psi_0(V_{z_0})$ sea una vecindad abierta de ζ_0 en la cual f^* es analítica, es decir U_{ζ_0} no contiene a ningún polo de f^*. Por lo tanto $f(z) = f^*(\psi_0(z))$ es analítica para toda $z \in V_{z_0}$.

b) Si ζ_0 es un polo de f^*:
Como en a), podemos escoger a la vecindad abierta V_{z_0} lo suficientemente pequeña tal que $U_{\zeta_0} = \psi_0(V_{z_0})$ sea una vecindad abierta de ζ_0 en la cual el único polo de f^* es ζ_0, es decir, f^* es analítica en $U_{\zeta_0} \setminus \{\zeta_0\}$. Por lo tanto $f(z) = f^*(\psi_0(z))$ es una función analítica en $V_{z_0} \setminus \{z_0\}$ y además como ζ_0 es un polo de f^* tenemos que:

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f^*(\zeta) = \infty$$

$$\text{entonces} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f^*(\psi_0(z)) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} f^*(\zeta) = \infty$$

por lo tanto z_0 es un polo de f.

Concluimos que f es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en los puntos z_0 tales que $\psi_0(z_0)$ es un polo de f^*. Por lo tanto f es meromorfa en $\mathbb{C}$.

q.e.d

Corolario. *(De los Teoremas 1.3 y 1.4) Existe una correspondencia biyectiva entre las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con periodo 2π y las funciones meromorfas en $\mathbb{C}^*$.*

Los resultados anteriores son de gran utilidad para ver la relación que existe entre las funciones periódicas y las funciones que tienen desarrollo en serie de Fourier, tal y como se muestra a continuación:

Teorema 1.5. *La clase de funciones enteras, periódicas con periodo 2π coincide con la clase de funciones que admiten serie de Fourier de la forma:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} \quad \textit{donde} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \ \forall \ k \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Más aún la serie anterior converge uniformemente en cada franja horizontal paralela al eje real.

Demostración:
Dada f una función entera y periódica con periodo 2π definimos a $f^*(\zeta)$ como en el enunciado del Teorema 1.3. Como f es entera entonces no tiene polos en $\mathbb{C}$, por lo tanto f^* no tiene polos en $\mathbb{C}^*$, y por el Teorema A.2 de Laurent tenemos que la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k$$

converge a $f^*(\zeta)$ uniformemente en cada subanillo cerrado $\overline{A_{\rho_1,\rho_2}(0)}$ de $A_{r,R}(0)$ con $0 < r < \rho_1 < \rho_2 < R \leq \infty$ $\forall$ r, R, es decir la convergencia es uniforme para toda $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tal que $0 < \rho_1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$.
Por el Teorema 1.4 tenemos entonces que $f(z) = f^*(e^{iz})$ y por lo tanto la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (e^{iz})^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$$

converge a $f(z)$ uniformemente para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \rho_1 \leq |e^{iz}| \leq \rho_2$. Por lo tanto si $z = x + iy$ tenemos que:

$$0 < \rho_1 \leq |e^{iz}| \leq \rho_2 \Rightarrow 0 < \rho_1 \leq |e^{-y}| \leq \rho_2 \Rightarrow \ln(\rho_1) \leq -y \leq \ln(\rho_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\rho_2}\right) \leq y \leq \ln\left(\frac{1}{\rho_1}\right)$$

Luego entonces la convergencia es uniforme en toda franja horizontal paralela al eje real.

Sea ahora $[-\pi \to \pi]$ el segmento de recta que une a $-\pi$ con π, entonces si $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{[-\pi\to\pi]} f(z)e^{-inz}dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}e^{-inx}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx-inx}dx$$

donde el intercambio de la integral con la serie se justifica por la convergencia uniforme sobre la recta $[-\pi \to \pi]$.
Notamos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi \qquad \text{cuando } k = n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx-inx}dx = \frac{(e^{(k-n)\pi i} - e^{-(k-n)\pi i})}{i(k-n)} = 0 \qquad \text{cuando } k \neq n$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = 2\pi c_n \quad \text{entonces:} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado si ahora f es una función dada que admite serie de Fourier de la forma (1.3) entonces:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}.$$

Por hipótesis la serie anterior converge en todo conjunto compacto y además es periódica de periodo 2π ya que si $z \in \mathbb{C}$ entonces:

$$f(z+2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz+k2\pi i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} = f(z)$$

q.e.d

Proposición 1.1. *La serie en (1.3) también se puede expresar como:*

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kz) + b_k \operatorname{sen}(kz)) \tag{1.4}$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad \forall\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikz} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikz} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikz} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikz} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + c_{-k})\cos(kz) + i(c_k - c_{-k})\operatorname{sen}(kz)
\end{aligned}$$

Sea $a_0 = 2c_0$ entonces:

$$a_0 = 2\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Sean $a_k = (c_k + c_{-k})$ y $b_k = i(c_k - c_{-k})$ para toda $k \in \mathbb{N}$, se sigue que :

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} + e^{ikx})dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

y que:

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)i(e^{-ikx} - e^{ikx})dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx$$

Por lo que:

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kz) + b_k\operatorname{sen}(kz))$$

q.e.d

Los siguientes resultados generalizan el Teorema 1.5 y la Proposición 1.1, a funciones meromorfas:

Teorema 1.6. *La clase de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas, con periodo 2π coincide con la clase de funciones de la forma :*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \tag{1.5}$$

donde g y $h \not\equiv 0$ son funciones enteras, periódicas con periodo 2π.

Demostración:
Sea f una función dada tal que f es meromorfa en $\mathbb{C}$ y periódica con periodo 2π. Como f es meromorfa en $\mathbb{C}$ entonces la caracterización alternativa de la Definición 1.2 nos asegura la existencia de una representación de f de la forma (1.5) con g y h funciones enteras sin embargo no asegura que sean de periodo 2π.
Sea f^* como en el Teorema 1.3, como f^* es meromorfa en $\mathbb{C}^*$ entonces existen g^* y $h^* \not\equiv 0$ funciones analíticas en $\mathbb{C}^*$ tales que:

$$f^*(\zeta) = \frac{g^*(\zeta)}{h^*(\zeta)}$$

Sin embargo por el Teorema 1.4 tenemos que:

$$f(z) = \frac{g^*(e^{iz})}{h^*(e^{iz})} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

donde $g(z) = g^*(e^{iz})$ y $h(z) = h^*(e^{iz})$ son claramente funciones enteras y periódicas con periodo 2π. Por lo tanto f es meromorfa de periodo 2π

Sea ahora f una función dada de la forma (1.5) con g y $h \not\equiv 0$ funciones enteras y periódicas con periodo 2π. De nuevo por la caracterización alternativa de la Definición 1.2 f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y más aún es periódica con periodo 2π ya que si $z \in \mathbb{C}$ entonces:

$$f(z+2\pi) = \frac{g(z+2\pi)}{h(z+2\pi)} = \frac{g(z)}{h(z)} = f(z)$$

q.e.d

Corolario. *(De los Teoremas 1.5 y 1.6) La expresión (1.5) puede también escribirse como:*

$$f(z) = \frac{\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}}{\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikz}}$$

donde c_k y c'_k son como en el Teorema 1.5 para las funciones g y h respectivamente, o bien escribirse como:

$$f(z) = \frac{\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kz) + b_k \operatorname{sen}(kz))}{\dfrac{a'_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos(kz) + b'_k \operatorname{sen}(kz))}$$

donde a_k, b_k y a'_k, b'_k son como en la Proposición 1.1 para las funciones g y h respectivamente

Observación 1.3. El Teorema 1.6 podría sugerir que una función periódica y meromorfa es también el cociente de dos polinomios, es decir una **función racional**, esto es claramente imposible pues cualquier función racional toma cada uno de sus valores un numero finito de veces, contrario a las funciones periódicas.

Capítulo 2

Origen de las Integrales Elípticas

El estudio de las integrales elípticas ha atraído las mentes de los más grandes matemáticos desde los inicios del siglo XVIII. A lo largo de la tesis recurriremos en varias ocasiones a la relación que guardan las integrales elípticas con las funciones periódicas. Presentaremos, a continuación, un breve recordatorio de por qué estas integrales son llamadas elípticas y luego presentaremos a una función simplemente periódica en $\mathbb{R}$ denotada como φ_l y conocida como la función lemniscata, dicha función representa de una manera sencilla la relación entre las integrales elípticas con las funciones periódicas, pues veremos que φ_l es la función inversa de una integral elíptica muy particular. Veremos también que la aparición en las matemáticas del estudio de la función lemniscata es considerado el momento en que comenzó el interés por las mal nombradas integrales elípticas.

2.1. Integrales Elípticas

Definición 2.1. *Sea $P \in \mathbb{C}[u]$ un polinomio de grado 3 o 4 sin raíces múltiples, entonces la expresión:*

$$\int\limits_{\gamma(t)} R\left(u, \sqrt{P(u)}\right) du \equiv \int\limits_{a}^{z} R\left(u, \sqrt{P(u)}\right) du$$

*es una **integral elíptica**, donde $R(u, v)$ representa una función racional de dos variables (generalmente $R \equiv Q(u)/\sqrt{P(u)}$, con $Q \in \mathbb{C}[u]$) y mientras que $\gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$, es una curva suave parametrizada que une al punto $a \in \mathbb{C}$ con la variable z, es decir $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z$. Además el valor de la integral cambia según el valor tomado por la raíz cuadrada y la curva γ elegida.*

El nombre de "elípticas" proviene del hecho de que dichas integrales son una consecuencia de tratar de calcular la longitud de arco de una elipse, por ejemplo si tenemos la gráfica de la elipse dada por E:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si ahora $L_p^{p_0}(E)$ es la longitud de arco de la gráfica de E desde el punto $p = (0, b)$ hasta un punto arbitrario $p_0 = (x_0, y_0)$ en la gráfica de E, tenemos que:

$$L_p^{p_0}(E) = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

suponiendo que p_0 se encuentra en la parte positiva de la raíz entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left[\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2b^2x}{a^2}\right)^2 = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

y por lo anterior tenemos que:

$$L_p^{p_0}(E) = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b^2)(x^2/a^2)}{a^2 - x^2}} dx$$

si hacemos el cambio de variable $u = \dfrac{x}{a}$ y denotando $k^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ tenemos entonces que:

$$L_p^{p_0}(E) = \int_0^{x_0/a} \sqrt{\frac{1 - k^2u^2}{1 - u^2}} du = \int_0^{x_0/a} \frac{(1 - k^2u^2)(1 - k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int_0^{x_0/a} \frac{1 - k^2u^2}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}} du$$

y por lo tanto la longitud de arco de una elipse es en efecto una integral elíptica.

Observación 2.1. Con lo anterior notamos que, aunque en un inicio la longitud de arco de una elipse no parecía ser una integral elíptica, después de una manipulación algebraica, expresamos dicha longitud en la forma indicada por la Definición 2.1.

Definición 2.2. *Sea $P \in \mathbb{C}[u]$ un polinomio de grado 3 o 4 sin raíces múltiples, entonces:*

$$\int_{\gamma(t)} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} \equiv \int_a^z \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

*es una **integral elíptica de primera especie** donde $\gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$, es una curva parametrizada que une al punto $a \in \mathbb{C}$ con la variable z, es decir $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z$. Además el valor de la integral cambia según el valor tomado de la raíz cuadrada y la curva γ elegida.*

2.2. La Lemniscata

En la sección anterior vimos por qué llamamos "elípticas" a ciertas integrales. Sin embargo el origen de éstas no proviene de calcular la longitud de arco de una elipse! En esta sección vamos a explorar la aparición de dichas integrales en las matemáticas. Además notaremos en múltiples ocasiones la profunda similitud que guarda la teoría desarrollada a partir de la lemniscata con la desarrollada de la circunferencia. La lemniscata es una curva que analizaremos a lo largo de todo el capítulo y la cual volverá a aparecer en el capítulo final de esta tesis. Por lo cual es conveniente definirla de manera formal y probar los resultados que ocuparemos:

Definición 2.3. *La **lemniscata** es una curva en $\mathbb{R}^2$ definida por la ecuación:*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

La gráfica de la lemniscata es:

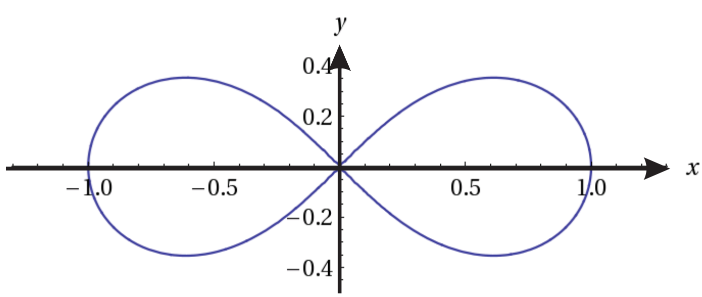


Figura 2.1: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

Proposición 2.1. *La ecuación polar de la lemniscata es:*

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

Demostración:
Sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, por lo tanto $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ implica que:

$$\left((r\cos(\theta))^2 + (r\operatorname{sen}(\theta))^2\right)^2 = (r\cos(\theta))^2 - (r\operatorname{sen}(\theta))^2$$

de donde se sigue :

$$r^4 = r^2(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))$$

y como $\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) = cos(2\theta)$, finalmente tenemos:

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

q.e.d

Si graficamos cuando $0 \leq \theta \leq \pi$:

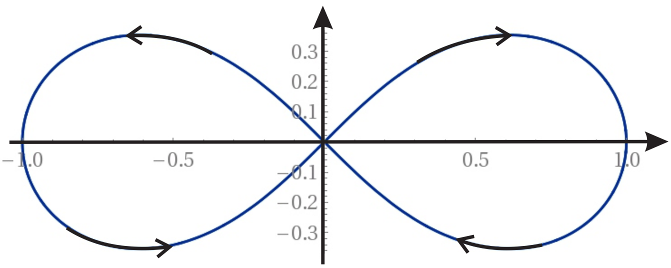
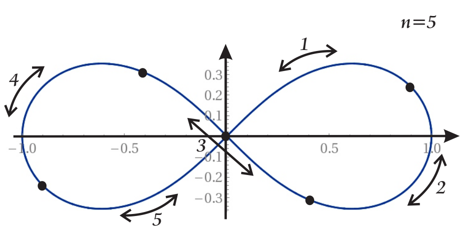


Figura 2.2: $r^2 = \cos(2\theta)$

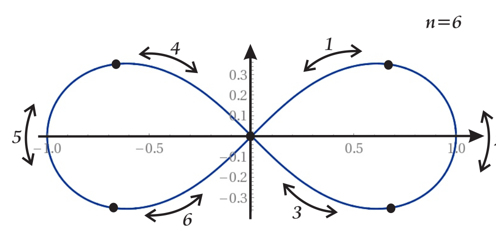
Las integrales elípticas surgen al buscar dividir la longitud de arco de la lemniscata en partes iguales utilizando regla y compás, donde el sentido de la división está marcado por flechas en la figura anterior, comenzando del origen al primer cuadrante bajando después al cuarto para cruzar por el origen hacia el segundo y finalmente terminar desde el tercer cuadrante hasta el origen.

Observaremos que las propiedades de dicha división se asemejan con la conocida división de la circunferencia, por lo que no perderemos de vista las similitudes que guardan la teoría de funciones trigonométricas desarrollada a partir de la circunferencia, con la desarrollada a partir de la lemniscata. Para conocer más del conjunto de los números construibles ver el Apéndice E, donde se encuentran las definiciones y resultados que usaremos a partir de este momento.

La siguiente figura muestra la división de la longitud de la lemniscata en n partes iguales para cuando $n = 5$ y $n = 6$:



(a) $n = 5$



(b) $n = 6$

Figura 2.3: División de la lemniscata

Es claro entonces que cuando n es impar, tendremos que el origen divide al segmento $(n+1)/2$ en dos partes, además los puntos de división del lado derecho de la lemniscata son simétricos con respecto al origen con los del lado izquierdo. Mientras que cuando n sea par, va a resultar que los puntos de división son simétricos con respecto a ambos ejes y que el segmento $n/2$ termina en el origen.

Además de la teoría de puntos construibles con regla y compás, para dividir la longitud de arco de la lemniscata es necesario conocer una expresión para ésta. Comencemos entonces por observar únicamente la lemniscata en el primer cuadrante del plano, es decir:

$$r = +\sqrt{cos(2\theta)} \text{ con } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

cuya gráfica es:

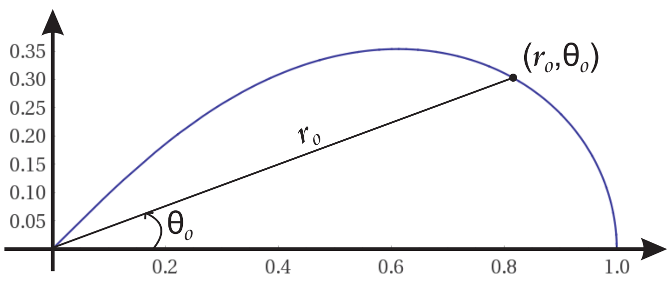


Figura 2.4: $r = \sqrt{cos(2\theta)}$

Por lo tanto si buscamos la longitud de arco desde el origen $(0,0)$, hasta el punto polar (r_0, θ_0) representado en la figura anterior (llamaremos a r_0 la **distancia polar** de dicho punto), debemos calcular la fórmula de longitud de arco. Recordemos que si $y = f(x)$, con f una función de clase C^1, entonces la longitud de arco s, cuando $a \leq x \leq b$ es:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Para la lemniscata en el primer cuadrante consideramos a θ como función de r, es decir que $y = \theta(r)$, por lo que si buscamos la longitud de arco cuando $0 \leq r \leq r_0$, esta será :

$$s = \int_0^{r_0} \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr$$

Para calcular s derivamos $r^2 = \cos(2\theta)$ con respecto a r, de donde se sigue que:

$$2r = -2\,\text{sen}(2\theta)\frac{d\theta}{dr}$$

lo que implica que:

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{r^2}{\operatorname{sen}(2\theta)}$$

y por lo tanto

$$1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = 1 + \frac{r^4}{\operatorname{sen}^2(2\theta)}$$

y como $\operatorname{sen}^2(2\theta) = 1 - \cos^2(2\theta) = 1 - r^4$, concluimos que entonces:

$$s = \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$$

Recordemos que para la circunferencia unitaria, la longitud de arco de ésta en el primer cuadrante es $\pi/2$, por lo que denotaremos a la longitud de arco de la lemniscata en el primer cuadrante ($(r_0, \theta_0) = (1, 0)$) como:

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr \tag{2.1}$$

donde la letra "ϖ" es una variación tipográfica de la letra griega π. Sin embargo la integral en (2.1) es impropia, por lo tanto para asegurarnos que ϖ existe debemos ver que esta integral es convergente, lo cual es inmediato ya que si $0 < r < 1$ entonces:

$$0 < 1 - r^2 < 1 - r^4$$

lo que implica que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

Figura 2.5: Variación de π

por lo tanto:

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr < \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr = \operatorname{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Así nos aseguramos que la integral es convergente y además obtenemos que $\varpi < \pi$ (de hecho se puede obtener al aproximar la integral que $\varpi \simeq 2.622057$, además en el Capitulo 8 p. 157, veremos que ϖ es un número trascendente). Así pues concluimos que, similar a la circunferencia donde una vuelta completa tiene longitud de arco 2π, una vuelta completa de la lemniscata tiene longitud de arco 2ϖ, es decir la suma de las longitudes de los arcos en los 4 cuadrantes:

$$2\varpi = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$$

A continuación presentamos el primer resultado que nos da condiciones suficientes para poder construir un punto de la lemniscata usando regla y compás:

Teorema 2.1. *Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto en la lemniscata, entonces si r es la distancia polar del punto P tenemos que P es construible si y sólo si r es construible.*

Demostración:
Veamos los dos lados de la doble implicación por separado:

($\Rightarrow$) Supongamos que P es construible, entonces x es construible y y es construible como $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ y $r^2 = x^2 + y^2$ tenemos que:

$$r = \pm \sqrt[4]{x^2 - y^2}$$

gracias a que los puntos construibles son cerrados bajo las operaciones de resta, multiplicación y extracción de raíz cuadrada (ver Teorema E.1 del Apéndice E) se sigue que entonces r es un punto construible.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que r es construible, de nuevo como $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ y también $r^2 = x^2 + y^2$, tenemos que:

$$r^4 = x^2 - y^2 \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

de donde se sigue que:

$$x^2 = r^4 + y^2 \qquad x^2 = r^2 - y^2$$

y por lo tanto:

$$r^4 + y^2 = r^2 - y^2$$

despejando a y obtenemos que:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(r^2 - r^4)}$$

y por ende que:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(r^2 + r^4)}$$

luego entonces x, y pertenecen al conjunto de números construibles y por lo tanto P es construible. **q.e.d**

Gracias a el Teorema anterior, si conocemos la distancia polar r asociada a un punto de la lemniscata, entonces podremos construir dicho punto con regla y compás. Por lo tanto en las siguientes secciones nos dedicaremos a estudiar dicha distancia polar y sus propiedades.

2.3. La Función Lemniscata en $\mathbb{R}$

Podemos definir a la función *seno* utilizando su inversa, es decir:

$$\operatorname{sen}(\theta) = x \text{ si y sólo si } \theta = \operatorname{sen}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

de manera análoga definimos entonces a la función lemniscata real:

Definición 2.4. *Definimos a* ***la función lemniscata en*** $\mathbb{R}$ *como la inversa de la longitud de arco de la lemniscata, es decir es una función* φ_l*, tal que:*

$$\varphi_l(s) = r \quad si\ y\ sólo\ si \quad s = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

Notamos que de acuerdo con la Definición 2.2, φ_l *es la función inversa de una integral elíptica de primera especie.*

Esto quiere decir que un punto de la lemniscata que se encuentra a una longitud s del origen tiene distancia polar $r = \varphi_l(s)$. Sin embargo hasta el momento sólo hemos definido a s como la longitud de arco de la lemniscata en el primer cuadrante, es decir:

$$\varphi_l : \left[0, \frac{\varpi}{2}\right] \to [0, 1]$$

Por lo tanto debemos extender esta función a una que dado cualquier $s \in \mathbb{R}$ obtenga la distancia polar r del punto que acumula una longitud de arco s desde el origen.

- ¿Cómo se mide la longitud de arco de la lemniscata?

Debemos analizar qué pasa cuando la longitud s buscada es un real negativo, o que es lo que ocurre cuando cuando $s > \varpi/2$. Para extender la función φ_l a todos los reales utilizaremos la siguiente convención para medir la longitud de arco: cuando $s \geq 0$, comenzamos del origen hacia el primer cuadrante hasta acumular una longitud de arco s, mientras que cuando $s < 0$ comenzamos del origen hacia el tercer cuadrante hasta acumular una longitud de arco $|s|$. Lo anterior se muestra en la siguiente figura:

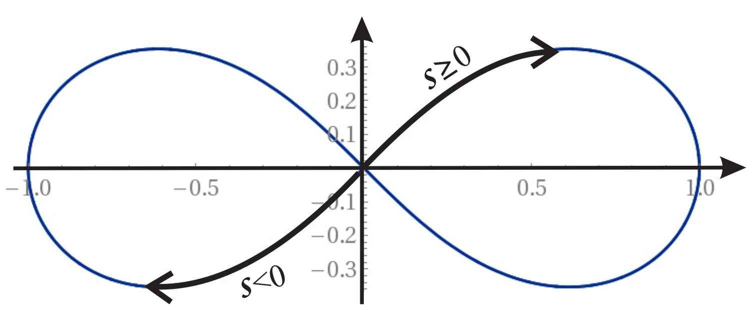


Figura 2.6: $s \geq 0$ y $s < 0$

Recordemos que la longitud de una vuelta completa es 2ϖ, por lo tanto cuando $|s| > 2\varpi$ tendremos que recorrer más de una vez el perímetro de la curva para encontrar el punto deseado donde el sentido del recorrido depende de si s es positivo o negativo. Luego entonces es claro que el punto de la lemniscata que tiene longitud de arco s será el mismo que tiene longitud de arco $s \pm 2\varpi$, es decir:

$$\varphi_l(s) = \varphi_l(s \pm 2\varpi) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$$

por lo tanto concluimos que φ_l es una función simplemente periódica en $\mathbb{R}$, con periodo fundamental 2ϖ. Además de la expresión en coordenadas polares, $r^2 = \cos(2\theta)$, se sigue que cuando $r \in [0,1]$ tenemos la mitad derecha de la lemniscata, es decir el primer y cuarto cuadrante, mientras que cuando $r \in [-1,0]$ tenemos la mitad izquierda de la lemniscata, la correspondiente al segundo y tercer cuadrante. Así finalmente tenemos una función periódica en $\mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi_l : \mathbb{R} \to [-1,1]$$

notando de nuevo la similitud con la función trigonométrica *seno*. La siguiente tabla nos muestra algunos valores de la función φ_l, que se siguen de inmediato de lo expuesto anteriormente:

s	$\varphi_l(s)$
0	0
$\varpi/2$	1
ϖ	0
$3\varpi/2$	-1
$-\varpi/2$	-1
$-\varpi$	0
$-3\varpi/2$	1

Analicemos siguientes propiedades de la función φ_l:

Proposición 2.2. *La función φ_l satisface que:*

i) *Es una función impar, es decir $\varphi_l(-s) = -\varphi_l(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$*

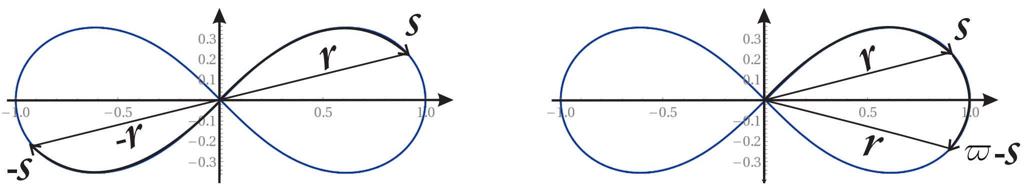
ii) $\varphi_l(\varpi - s) = \varphi_l(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$

Demostración:

El inciso ***i)***, se sigue del hecho que la distancia polar al recorrer una longitud de arco s es la misma que al recorrer $-s$, es decir obtendremos dos puntos simétricos en la lemniscata con respecto al origen, Ver Figura 2.7 (a). Mientras que el inciso ***ii)*** es una consecuencia de que la longitud de arco de media lemniscata es ϖ, por lo tanto recorrer una longitud $\varpi - s$ equivale a recorrer s comenzando por el cuarto cuadrante, de este modo los puntos obtenidos son simétricos con respecto al eje horizontal, Ver Figura 2.7 (b).

q.e.d

Veremos a lo largo del texto que para una función periódica es de suma importancia analizar a la par a su derivada, por ejemplo para las funciones trigonométricas *seno* y su derivada *coseno*. Por ello es razonable explorar la derivada de la función lemniscata junto con sus propiedades, veamos entonces la ecuación diferencial que satisface φ_l:



(a) $\varphi_l(-s) = -\varphi_l(s) = -r$ (b) $\varphi_l(s) = \varphi_l(\varpi - s) = r$

Figura 2.7: Propiedades de φ_l

Teorema 2.2. *(La Ecuación Diferencial para φ_l) Sea φ_l la función lemniscata, entonces:*

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$$

Demostración:
Primero consideremos longitudes s tal que $0 \leq s < \varpi/2$, entonces tenemos que:

$$s = \int_0^{\varphi_l(s)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

por lo tanto derivando ambos lados con respecto a s tenemos que:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi_l^4(s)}} \varphi_l'(s) - 0$$

lo que implica entonces que :

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \ \text{ con } \ 0 \leq s < \frac{\varpi}{2}$$

Para el caso particular en que $s = \varpi/2$, tenemos que

$$\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 1^4 = 1, \ \text{ lo que implica que } \quad 1 - \varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0$$

y como además $\max\{\varphi_l(s) : 0 \leq s \leq \varpi/2\} = 1$ y se alcanza en $s = \varpi/2$, entonces:

$$\varphi_l'\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0$$

de donde

$$\varphi_l'\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 1 - \varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{2}\right)$$

por lo que :

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \;\text{ con }\; 0 \leq s \leq \frac{\varpi}{2}$$

Así pues la identidad es válida cuando la longitud s no pasa del primer cuadrante. Veamos ahora que es válida también cuando $\varpi/2 < s \leq 2\varpi$, y por lo tanto, por la periodicidad de φ_l, en todo $\mathbb{R}$. Tomemos ahora a s tal que $\varpi/2 < s \leq \varpi$, luego por la Proposición 2.2 *ii)*:

$$\begin{aligned}\varphi_l(s) &= \varphi_l(\varpi - s)\\ \varphi_l'(s) &= \varphi_l'(\varpi - s)\end{aligned}$$

pero es claro que $0 \leq \varpi - s < \varpi/2$, entonces por lo ya visto $\left(\varphi_l'(\varpi - s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(\varpi - s)$, lo que implica que:

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \;\text{ con }\; \frac{\varpi}{2} < s \leq \varpi$$

Finalmente cuando s es tal que $\varpi < s \leq 2\varpi$, entonces existe s_1 tal que $s = \varpi + s_1$ con $0 < s_1 \leq \varpi$, tenemos entonces que de manera similar a la Proposición 2.2 *i)*, $\varpi - s_1$ es simétrico a s con respecto al origen y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\varphi_l(s) &= -\varphi_l(\varpi - s_1)\\ \varphi_l'(s) &= \varphi_l'(\varpi - s_1)\end{aligned}$$

pero es claro que $0 \leq \varpi - s_1 < \varpi$, así pues se satisface que $\left(\varphi_l'(\varpi - s_1)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(\varpi - s)$, es decir que $\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - (-\varphi_l(s))^4$ luego entonces:

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \;\text{ con }\; \varpi < s \leq 2\varpi$$

Por lo tanto tenemos que $\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s)$ es válido para toda s tal que $0 \leq s \leq 2\varpi$, y al ser φ_l una función simplemente periódica con periodo 2ϖ se sigue que para toda $s \in \mathbb{R}$ existe s' tal que $\varphi_l(s) = \varphi_l(s')$ con $0 \leq s' \leq 2\varpi$, por ende:

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s)\ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

q.e.d

Observación 2.2. Notamos la analogía del resultado anterior con la conocida identidad trigonométrica:

$$\left(\operatorname{sen}'(t)\right)^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora las propiedades de φ_l':

Proposición 2.3. *La función φ_l' satisface que:*

i) *Es una función simplemente periódica con periodo fundamental 2ϖ*

ii) *Es una función par, es decir $\varphi_l'(-s) = \varphi_l'(s)\ \forall\ s \in \mathbb{R}$*

iii) $\varphi_l'(\varpi - s) = -\varphi_l'(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$

iv) $\varphi_l''(s) = -2\varphi_l^3(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$

Demostración:
La propiedad ***i)*** es una consecuencia inmediata del hecho de que φ_l es una función simplemente periódica con periodo fundamental 2ϖ. Los incisos ***ii)*** y ***iii)*** se siguen de inmediato de la Proposición 2.2 incisos *i)* y *ii)* respectivamente. Mientras que para ver ***iv)***, notamos que por el Teorema 2.2 tenemos que para toda $s \in \mathbb{R}$:

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s)$$

derivando ambos lados con respecto a s se sigue que:

$$2\varphi_l'(s)\varphi_l''(s) = -4\varphi_l^3(s)\varphi_l'(s)$$

y por lo tanto al dividir ambos lados entre $2\varphi_l'(s)$ obtenemos que

$$\varphi_l''(s) = -2\varphi_l^3(s)$$

q.e.d

Trabajaremos con distintas funciones periódicas, tarde o temprano nos encontraremos con los teoremas de adición de dichas funciones, y el caso de la función lemniscata no es la excepción. La aparición del teorema de adición para la función φ_l envuelve una parte de la historia de las matemáticas que nos interesa contar, pues involucra un momento considerado como el verdadero nacimiento de las integrales elípticas.

La aparición de las integrales elípticas comenzó con el trabajo del matemático italiano, Giulio Carlo di Fagnano, quien desde 1718 centró sus estudios en la división de la longitud de arco de la lemniscata, usando regla y compás. El probó la siguiente fórmula de duplicación de la longitud de arco de la lemniscata:

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt + \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt = \int_0^{\gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

donde $\gamma(\alpha) = \dfrac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^4}}{1+\alpha^4}$.

Esto implica que si α es la distancia polar de un punto en la lemniscata con longitud de arco s, entonces $\gamma(\alpha)$ es la distancia polar de otro punto de la lemniscata que tiene longitud $2s$. Con este y otros resultados, Fagnano pudo dividir la longitud de la lemniscata en dos, tres y cinco partes iguales, usando regla y compás.

(a) Giulio Fagnano

PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO PRIMO.

IN PESARO
L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

(b) Portada de sus obras

Figura 2.8: Giulio Carlo di Fagnano

Fue el 23 de diciembre de 1751 cuando Leonhard Euler recibió una recopilación de las investigaciones de Fagnano, se maravilló por la fórmula de duplicación, reconociendo la importancia de ésta para el desarrollo de la teoría de las integrales elípticas. Euler fue, por supuesto, mucho más allá y logro probar una fórmula de adición para la longitud de cualesquiera dos puntos en la lemniscata:

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt + \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt = \int_0^{\gamma(\alpha,\beta)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

donde $\gamma(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha\sqrt{1-\beta^4}+\beta\sqrt{1-\alpha^4}}{1+\alpha^2\beta^2}$.

Es decir que si α, β son las distancias polares de dos puntos en la lemniscata con longitudes x, y respectivamente, entonces $\gamma(\alpha,\beta)$ es la distancia polar de un tercer punto sobre la lemniscata con longitud de arco $x+y$. Es claro entonces que la fórmula de duplicación de Fagnano es simplemente un caso particular de la de adición de Euler. Fue entonces a partir de que Euler recibió las obras de Fagnano que las integrales elípticas comenzaran a surgir en las matemáticas, mucho antes incluso de que Jacobi o Weierstrass nacieran e incluso antes de que se les relacionara con la longitud de arco de una elipse.

Veremos a continuación una motivación para la fórmula de adición de Euler. Como bien hemos mencionado y también observado la lemniscata guarda una profunda relación con la circunferencia. Consideremos entonces a la circunferencia con ecuación polar dada por $r = cos(\theta)$:

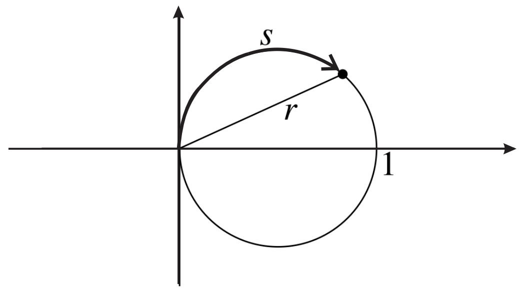


Figura 2.9: $r = cos(\theta)$

Por lo que de manera análoga a como vimos con la longitud de arco de la lemniscata concluimos que la longitud de arco $s \in [0, \pi/2]$, de un punto en la circunferencia con distancia polar $r \in [0, 1]$ está dada por:

$$s = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

es decir que $s = \text{sen}^{-1}(r)$. Por lo tanto la siguiente proposición motiva la fórmula de adición de Euler, pues presenta una fórmula de adición para las longitudes de arco de dos puntos en la circunferencia. Notaremos la similitud entre la $\gamma(\alpha, \beta)$ de la fórmula de adición de Euler con la de la proposición:

Proposición 2.4. *Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tal que $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2} \in [0, 1]$ entonces:*

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\gamma(\alpha,\beta)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Demostración:
Denotemos $\gamma \equiv \gamma(\alpha, \beta)$, la proposición equivale a demostrar que:

$$\text{sen}^{-1}(\alpha) + \text{sen}^{-1}(\beta) = \text{sen}^{-1}(\gamma).$$

Sea $\theta_\alpha = \text{sen}^{-1}(\alpha)$ y $\theta_\beta = \text{sen}^{-1}(\beta)$, luego entonces obtenemos fácilmente que $\text{sen}(\theta_\alpha) = \alpha$, $\cos(\theta_\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$, $\text{sen}(\theta_\beta) = \beta$, y que $\cos(\theta_\beta) = \sqrt{1-\beta^2}$. Usando entonces la formula de adicion para la función *seno* tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_\alpha + \theta_\beta) &= \text{sen}(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta) + \text{sen}(\theta_\beta)\cos(\theta_\alpha) \\ &= \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2} = \gamma(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

es decir que $\theta_\alpha + \theta_\beta = \text{sen}^{-1}(\gamma)$, como queríamos. **q.e.d**

Observación 2.3. Notamos que φ_l juega el papel del *seno* y φ_l' juega el papel del *coseno*

Después de este breviario histórico, volvemos a nuestro tema de interés, es decir a la fórmula de adición para la función φ_l. Esta se deduce simplemente de expresar la fórmula de adición de Euler en términos de la función lemniscata. Así pues tenemos que como α es la distancia polar del punto con longitud x, β del punto con longitud y, y $\gamma(\alpha, \beta)$ del punto con longitud $x + y$, entonces:

$$\alpha = \varphi_l(x) \qquad \beta = \varphi_l(y) \qquad \gamma(\alpha, \beta) = \varphi_l(x + y)$$

y por la fórmula de Euler tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_l(x + y) = \gamma(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha\sqrt{1 - \beta^4} + \beta\sqrt{1 - \alpha^4}}{1 + \alpha^2\beta^2} \\ &= \frac{\varphi_l(x)\sqrt{1 - \varphi_l^4(y)} + \varphi_l(y)\sqrt{1 - \varphi_l^4(x)}}{1 + \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}\end{aligned}$$

pero si $0 \leq x, y \leq \varpi/2$ entonces del Teorema 2.2 se sigue que $\varphi_l'(x) = \sqrt{1 - \varphi_l^4(x)}$ y que $\varphi_l'(y) = \sqrt{1 - \varphi_l^4(y)}$, por lo tanto:

$$\varphi_l(x + y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1 + \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

de este modo se obtiene un teorema de adición para la función φ_l. En lugar de probar este teorema por medio de la fórmula de adición de Euler (la cual no probaremos), usaremos un método más reciente que no se restringe a longitudes x, y tales que $0 \leq x, y \leq \varpi/2$. Necesitaremos antes de un Lema que establece un resultado interesante acerca de las funciones de dos variables:

Lema 2.1. *Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$, entonces tenemos que:*

$$g(x, y) = g(x + y, 0) \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \textit{si y sólo si} \ \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \ \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración:
Definamos a la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(u, v) = g\left(\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v)\right)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial v} = 0 \text{ si y sólo si } \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Ahora veamos los dos lados de la doble implicación del lema por separado:

$(\Rightarrow)$ Si $g(x,y) = g(x+y,0)$, tendremos que :

$$\begin{aligned} h(u,v) &= g\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right) \\ &= g(u,0) \\ &= h(u,u) \end{aligned}$$

lo que implica que $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$, y por ende que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$

$(\Leftarrow)$ Si ahora tenemos que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ se sigue que $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$, lo que implica que:

$$h(u,v) = h(u,v_0)$$

donde v_0 es una constante para v, en particular si ponemos $v_0 = u$, tenemos que:

$$g\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right) = h(u,v) = h(u,u) = g(u,0)$$

luego entonces haciendo $u = x+y$ y $v = x-y$ se sigue que:

$$g(x,y) = g(x+y,0)$$

q.e.d

Usamos este lema para establecer el teorema de adición de la función lemniscata:

Teorema 2.3. *(Teorema de Adición para φ_l) La función φ_l satisface que:*

$$\varphi_l(x+y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}$

Demostración:
Definamos a la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x,y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

ya vimos que para toda $x \in \mathbb{R}$ existe $\varphi_l'(x)$ y $\varphi_l''(x)$, luego entonces g es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Además notamos que gracias a la simetría que tiene la función g con respecto a x y a y y usando que $\varphi_l''(x) = -2\varphi_l^3(x)$ para toda x se sigue que en este caso:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

por lo que aplicando el Lema anterior obtenemos que $g(x,y) = g(x+y,0)$, luego usando que $\varphi_l(0) = 0$ y $\varphi_l'(0) = 1$, se sigue que entonces:

$$\frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)} = \frac{\varphi_l(x+y)\varphi_l'(0) + \varphi_l(0)\varphi_l'(x+y)}{1+\varphi_l^2(x+y)\varphi_l^2(0)} = \varphi_l(x+y)$$

por lo tanto en efecto se satisface el teorema de adición para toda $x, y \in \mathbb{R}$

q.e.d

Del teorema de adición para φ_l se siguen las siguientes identidades que serán de gran utilidad en lo que sigue de esta sección:

Corolario. *(Del Teorema 2.3) Sea φ_l la función lemniscata, entonces se cumple que:*

i) $\varphi_l(2x) = \dfrac{2\varphi_l(x)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^4(x)}$ *(Fórmula de duplicación)*

ii) $\varphi_l(x-y) = \dfrac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) - \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$ *(Resta de longitudes)*

iii) $\varphi_l(x+y) + \varphi_l(x-y) = \dfrac{2\varphi_l(x)\varphi_l'(y)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$

El Teorema de adición de la función lemniscata y sus consecuencias juegan un papel crucial en la división de puntos con igual longitud de arco

Ejemplo 2.1. Deseamos saber si los puntos de división de la lemniscata, en 8 segmentos con misma longitud de arco, son construibles con regla y compás:

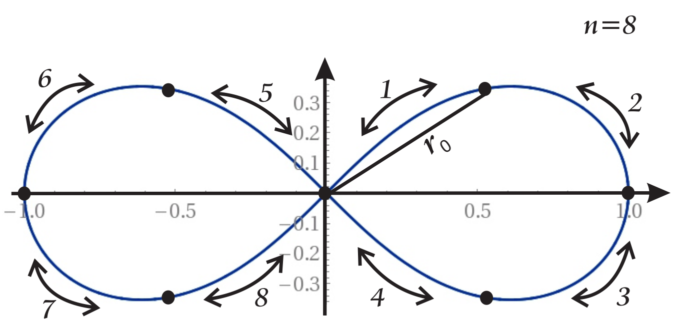


Figura 2.10: $n = 8$

Cada una de las 8 partes debe de tener longitud $2\varpi/8 = \varpi/4$. La figura anterior muestra que, gracias a la simetría, es únicamente necesario saber si el punto con distancia polar r_0 es construible para determinar si la división en 8 partes iguales lo es. Para verificarlo notemos que:

$$r_0 = \varphi_l\left(\frac{\varpi}{4}\right)$$

luego entonces gracias a que $\varphi_l(\varpi/2) = 1$ y a la fórmula de duplicación obtenemos que:

$$1 = \varphi_l\left(\frac{\varpi}{2}\right) = \varphi_l\left(2\frac{\varpi}{4}\right) = \frac{2\varphi_l\left(\frac{\varpi}{4}\right)\varphi_l'\left(\frac{\varpi}{4}\right)}{1+\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{4}\right)} = \frac{2\varphi_l\left(\frac{\varpi}{4}\right)\sqrt{1-\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{4}\right)}}{1+\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{4}\right)}$$

y por ende que:

$$1 = \frac{2r_0\sqrt{1-r_0^4}}{1+r_0^4}$$

de donde se sigue que:

$$(1+r_0^4)^2 - 4r_0^2(1-r_0^4) = 0$$

desarrollando obtenemos que:

$$r_0^8 + 4r_0^6 + 2r_0^4 - 4r_o^2 + 1 = 0$$

factorizando la ecuación anterior resulta que:

$$(r_0^4 + 2r_0^2 - 1)^2 = 0$$

y ahora es fácil ver la única solución real positiva (pues sabemos que $0 < r_0$) de lo anterior es cuando:

$$r_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

luego entonces del Teorema E.1 del Apéndice E, se sigue que r_0 es en efecto un número construible y por ende los puntos de la división de la lemniscata en 8 partes lo son.

Podemos generalizar el ejemplo anterior con el siguiente teorema:

Teorema 2.4. *Si $\varphi_l(x_0)$ es construible entonces $\varphi_l\left(\frac{x_0}{2}\right)$ también lo es*

Demostración:
Sean

$$r_0 = \varphi_l\left(\frac{x_0}{2}\right) \quad \text{y} \quad r_1 = \varphi_l(x_0)$$

por lo tanto de la fórmula de duplicación se sigue que:

$$r_1 = \varphi_l(x_0) = \varphi_l\left(2\frac{x_0}{2}\right) = \frac{2\varphi_l\left(\frac{x_0}{2}\right)\varphi_l'\left(\frac{x_0}{2}\right)}{1+\varphi_l^4\left(\frac{x_0}{2}\right)}$$

elevando al cuadrado obtenemos que:

$$r_1^2 = \left(\frac{2\varphi_l\left(\frac{x_0}{2}\right)\varphi_l'\left(\frac{x_0}{2}\right)}{1+\varphi_l^4\left(\frac{x_0}{2}\right)}\right)^2 = \frac{4\varphi_l^2\left(\frac{x_0}{2}\right)\varphi_l'^2\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\left(1+\varphi_l^4\left(\frac{x_0}{2}\right)\right)^2}$$

y recordando que $\varphi_l'^2(x) = 1 - \varphi_l^4(x)$ resulta que:

$$r_1^2 = \frac{4r_0^2(1 - r_0^4)}{(1 + r_0^4)^2} \tag{2.2}$$

Como ya sabemos que r_1 es construible, entonces sólo necesitamos expresar a r_0 en términos de r_1 de tal manera que dicha expresión sea un número construible (ver Apéndice E). Sin embargo no es nada trivial el despeje de r_0 en (2.2). A continuación despajaremos a r_0 usando una intuición no motivada aún, pues necesita del análisis de φ_l en $\mathbb{C}$, sin embargo la motivación se encuentra en Ejemplo 8.1 pág. 149. Sea entonces $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$z^2 = \frac{2ir_0^2}{1 - r_0^4}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{-2iz^2}{1 - z^4} &= \frac{-2i\left(\dfrac{2ir_0^2}{1 - r_0^4}\right)}{1 - \left(\dfrac{2ir_0^2}{1 - r_0^4}\right)^2} \\ &= \frac{\dfrac{4r_0^2}{1 - r_0^4}}{\dfrac{(1 - r_0^4)^2 + 4r_0^2}{(1 - r_0^4)^2}} = \frac{4r_0^2(1 - r_0^4)}{(1 + r_0^4)^2} = r_1^2\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que :

$$-2iz^2 = r_1^2(1 - z^4)$$

de donde se sigue que

$$(r_1^2)z^4 - (2i)z^2 - (r_1^2) = 0$$

lo que implica que:

$$z^2 = \frac{2i \pm \sqrt{-4 + 4r_1^4}}{2r_1^2} = \frac{i \pm \sqrt{r_1^4 - 1}}{r_1^2}$$

como i, r_1 son construibles y sabemos que los números construibles constituyen un campo y que además son cerrados bajo extracción de raíces cuadradas entonces z^2 es un número construible. Luego de la definición de z^2 se sigue que:

$$(1 - r_0^4)z^2 = 2ir_0^2$$

por lo que:

$$(z^2)r_0^4 + (2i)r_0^2 - (z^2) = 0$$

es decir que:

$$r_0^2 = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 4z^4}}{2z^2} = \frac{-i \pm \sqrt{z^4 - 1}}{z^2}$$

y al ser ya z^2 un número construible concluimos similarmente que r_0^2 también lo es y por ende r_0 es en efecto un número construible. **q.e.d**

La fórmula de duplicación fue clave para probar el resultado anterior, es natural ahora preguntarnos si existe una fórmula de triplicación que nos permita probar un resultado similar, veremos que no sólo existe una de triplicación sino que tendremos fórmulas para la multiplicación de una longitud por cualquier número entero. Antes de abarcar un resultado tan general observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Ahora queremos saber si la división de la lemniscata en 6 partes iguales es construible con regla y compás:

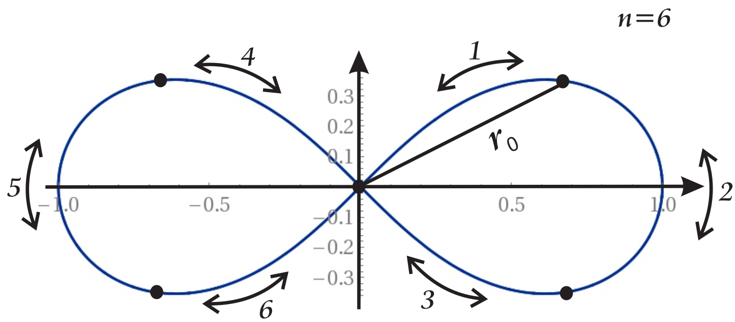


Figura 2.11: $n = 6$

Cada parte tendrá una longitud de $2\varpi/6 = \varpi/3$ lo que sugiere el uso de la fórmula de triplicación, para obtenerla notemos que de *iii)* del Corolario del Teorema 2.3 se sigue que:

$$\varphi_l(2x + x) + \varphi_l(2x - x) = \frac{2\varphi_l(2x)\varphi_l'(x)}{1 + \varphi_l^2(2x)\varphi_l^2(x)}$$

lo que implica que:

$$\varphi_l(3x) = -\varphi_l(x) + \frac{2\varphi_l(2x)\varphi_l'(x)}{1 + \varphi_l^2(2x)\varphi_l^2(x)}$$

sustituyendo entonces la fórmula de duplicación obtenemos que:

$$\varphi_l(3x) = -\varphi_l(x) + \frac{\dfrac{4\varphi_l(x)\varphi_l'^2(x)}{1 + \varphi_l^4(x)}}{1 + \dfrac{4\varphi_l^4(x)\varphi_l'^2(x)}{(1 + \varphi_l^4(x))^2}}$$

$$= -\varphi_l(x) + \frac{4\varphi_l(x)\varphi_l'^2(x)(1 + \varphi_l^4(x))}{(1 + \varphi_l^4(x))^2 + 4\varphi_l^4(x)\varphi_l'^2(x)}$$

y recordando que $\varphi_l'^2(x) = 1 - \varphi_l^4(x)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_l(3x) &= -\varphi_l(x) + \frac{4\varphi_l(x)(1-\varphi_l^8(x))}{-3\varphi_l^8(x)+4\varphi_l^4(x)+1} \\
&= \varphi_l(x)\left(-1 + \frac{4-4\varphi_l^8(x)}{-3\varphi_l^8(x)+6\varphi_l^4(x)+1}\right) \\
&= \varphi_l(x)\left(\frac{-\varphi_l^8(x)-6\varphi_l^4(x)+3}{-3\varphi_l^8(x)+6\varphi_l^4(x)+1}\right)
\end{aligned}$$

lo que nos da la fórmula de triplicación deseada. Luego entonces para calcular $r_0 = \varphi_l(\varpi/3)$, notamos que por un lado $\varphi_l(\varpi) = 0$, mientras que por otro, usando la fórmula de triplicación:

$$0 = \varphi_l(\varpi) = \varphi_l\left(3\frac{\varpi}{3}\right) = \varphi_l\left(\frac{\varpi}{3}\right)\left(\frac{-\varphi_l^8\left(\frac{\varpi}{3}\right)-6\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{3}\right)+3}{-3\varphi_l^8\left(\frac{\varpi}{3}\right)+6\varphi_l^4\left(\frac{\varpi}{3}\right)+1}\right)$$

lo que implica que :

$$r_0\left(\frac{-r_0^8-6r_0^4+3}{-3r_0^8+6r_0^4+1}\right) = 0$$

pero como $r_0 \neq 0$ entonces se sigue que $r_0^8 + 6r_0^4 - 3 = 0$ y utilizando dos veces la fórmula cuadrática obtenemos que la única solución positiva para r_0 es:

$$r_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$$

y por lo tanto concluimos que r_0 es un numero construible y de la figura 2.10 se sigue que la división de la lemniscata en 6 partes iguales es construible con regla y compás.

Presentamos ahora un teorema que nos da de forma general las fórmulas para multiplicación de la longitud de arco por cualquier número entero:

Teorema 2.5. *Dado $n \in \mathbb{N}$ existen polinomios $P_n(u), Q_n(u) \in \mathbb{Z}[u]$ tales que cuando n es impar:*

$$\varphi_l(nx) = \varphi_l(x)\frac{P_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}$$

y cuando n es par:

$$\varphi_l(nx) = \varphi_l(x)\frac{P_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}\varphi_l'(x)$$

más aún resulta que $Q_n(0) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Demostración:
Inducción sobre n. Cuando $n = 1$, es claro que poniendo $P_1(u) = Q_1(u) = 1$, entonces:

$$\varphi_l(x) = \varphi_l(x)\frac{P_1\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_1\left(\varphi_l^4(x)\right)}$$

Mientras que cuando $n=2$, si ponemos $P_2(u)=2$ y $Q_2(u)=1+u$, entonces la fórmula de duplicación es:

$$\varphi_l(2x)=\varphi_l(x)\frac{P_2\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_2\left(\varphi_l^4(x)\right)}\varphi_l'(x)$$

además $Q_1(0)=Q_2(0)=1$. Por ende el teorema es válido para $n=1$ y para $n=2$. Como hipótesis de inducción suponemos que es válido para $n-1$ y para n, lo que nos deja dos casos a analizar:

Caso *i*): $n-1$ es impar. De *iii)* del Coroloario del Teorema 2.3 se sigue entonces que:

$$\varphi_l((n+1)x)=-\varphi_l((n-1)x)+\frac{2\varphi_l(nx)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(nx)\varphi_l^2(x)} \tag{2.3}$$

pero como $n-1$ es impar entonces n es par y por hipótesis de inducción tenemos que:

$$\varphi_l((n-1)x)=\varphi_l(x)\frac{P_{n-1}\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_{n-1}\left(\varphi_l^4(x)\right)} \qquad \varphi_l(nx)=\varphi_l(x)\frac{P_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4(x)\right)}\varphi_l'(x)$$

denotaremos $P_k\equiv P_k\left(\varphi_l^4(x)\right)$, este abuso de notación es para ahorrar espacio en los cálculos posteriores. Luego al sustituir la hipótesis de inducción en la ecuación (2.3) se sigue que:

$$\varphi_l((n+1)x)=-\varphi_l(x)\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}+\frac{2\left(\varphi_l(x)\frac{P_n}{Q_n}\varphi_l'(x)\right)\varphi_l'(x)}{1+\left(\varphi_l(x)\frac{P_n}{Q_n}\varphi_l'(x)\right)^2\varphi_l^2(x)}$$

$$=-\frac{\varphi_l(x)P_{n-1}}{Q_{n-1}}+\frac{\left(2\varphi_l(x)\varphi_l'^2(x)P_n\right)/Q_n}{1+\left(\varphi_l^4(x)\varphi_l'^2(x)P_n^2\right)/Q_n^2}$$

y como $\varphi_l'^2(x)=1-\varphi_l^4(x)$, entonces:

$$\varphi_l((n+1)x)=-\frac{\varphi_l(x)P_{n-1}}{Q_{n-1}}+\frac{\left(2\varphi_l(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n\right)Q_n^2}{\left(Q_n^2+\varphi_l^4(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n^2\right)Q_n}$$

$$=\frac{\left(-\varphi_l(x)P_{n-1}\right)\left(Q_n^2+\varphi_l^4(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n^2\right)+\left(2\varphi_l(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n\right)Q_n}{Q_{n-1}\left(Q_n^2+\varphi_l^4(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n^2\right)}$$

$$=\varphi_l(x)\left(\frac{-P_{n-1}\left(Q_n^2+\varphi_l^4(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n^2\right)+2\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_nQ_n}{Q_{n-1}\left(Q_n^2+\varphi_l^4(x)\left(1-\varphi_l^4(x)\right)P_n^2\right)}\right)$$

por lo tanto si definimos :

$$P_{n+1}(u)=-P_{n-1}(u)\left(Q_n^2(u)+u\left(1-u\right)P_n^2(u)\right)+2\left(1-u\right)P_n(u)Q_n(u)$$
$$Q_{n+1}(u)=Q_{n-1}(u)\left(Q_n^2(u)+u\left(1-u\right)P_n^2(u)\right)$$

obtenemos que

$$\varphi_l((n+1)x) = \varphi_l(x)\frac{P_{n+1}\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_{n+1}\left(\varphi_l^4(x)\right)}$$

y además notamos que gracias a la hipótesis de inducción $Q_{n-1}(0) = Q_n(0) = 1$, entonces :

$$Q_{n+1}(0) = Q_{n-1}(0)Q_n^2(0) = 1$$

por lo tanto, al ser $n+1$ impar el resultado es válido también para $n+1$. Completando así el primer caso.
Caso *ii*): $n-1$ es par. Análogamente al caso *i)* aplicamos la hipótesis de inducción a la ecuación de *iii)* del Coroloario del Teorema 2.3, pero considerando ahora que $n-1$ es par y n impar. Con cuentas similares a las del primer caso obtenemos que entonces:

$$\varphi_l((n+1)x) = \varphi_l(x)\frac{P_{n+1}\left(\varphi_l^4(x)\right)}{Q_{n+1}\left(\varphi_l^4(x)\right)}\varphi_l'(x)$$

donde:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u) &= -P_{n-1}(u)\left(Q_n^2(u) + uP_n^2(u)\right) + 2Q_{n-1}(u)Q_n(u)P_n(u) \\ Q_{n+1}(u) &= Q_{n-1}(u)\left(Q_n^2(u) + uP_n^2(u)\right) \end{aligned}$$

notamos que como por hipótesis de inducción $Q_{n-1}(0) = Q_n(0) = 1$, entonces :

$$Q_{n+1}(0) = Q_{n-1}(0)Q_n^2(0) = 1$$

por lo tanto, al ser en este caso $n+1$ par, el resultado es válido también para $n+1$. Completando así la prueba. **q.e.d**

Los siguientes resultados son consecuencia del teorema anterior. Son de gran importancia para saber para qué n la división en n partes iguales de la longitud de arco de la lemniscata es posible.

Proposición 2.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y P_n como en el Teorema 2.5. Entonces las distancias polares de los puntos en la lemniscata correspondientes a la división de ésta en n puntos, son raíces de los polinomios:*

$$\begin{aligned} uP_n(u^4) &\qquad \textit{cuando } n \textit{ es impar} \\ uP_n(u^4)(1-u^2) &\qquad \textit{cuando } n \textit{ es par} \end{aligned}$$

a estos polinomios se les llama ***los polinomios de la división en n-partes***

Demostración:
Sabemos que las distancias polares de los puntos en la lemniscata correspondientes a la división de ésta en n puntos son:

$$\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right) \quad \text{con } m = 0, 1, \cdots, n-1$$

y por la periodicidad de φ_l tenemos que $\varphi_l(m2\varpi) = \varphi_l(2\varpi) = 0$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Sin embargo por el Teorema 2.5 tenemos que, cuando n es impar:

$$0 = \varphi_l(m2\varpi) = \varphi_l\left(nm\frac{2\varpi}{n}\right) = \varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\frac{P_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}$$

de donde se sigue que para $m = 0, 1, \cdots, n-1$, $\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ es una raíz de $uP_n(u^4)$. Mientras que cuando n es par:

$$0 = \varphi_l(m2\varpi) = \varphi_l\left(nm\frac{2\varpi}{n}\right) = \varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\frac{P_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}\varphi_l'\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$$

y como $\varphi_l'^2(x) = 1 - \varphi_l^4(x)$, entonces multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $\varphi_l'\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ se sigue que :

$$0 = \varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\frac{P_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}{Q_n\left(\varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)}\left(1 - \varphi_l^4\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)\right)$$

lo que implica que $uP_n(u^4)(1-u^4) = 0$ con $u = \varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$, y por diferencia de cuadrados se sigue que $uP_n(u^4)(1-u^2)(1+u^2) = 0$ y como $u \in \mathbb{R}$ entonces $(1+u^2) \neq 0$. Por lo que concluimos que para $m = 0, 1, \cdots, n-1$, $\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ es una raíz de $uP_n(u^4)(1-u^2)$

q.e.d

Ahora ya tememos herramientas sólidas para asegurar más hechos acerca de los puntos construibles de la división de la lemniscata, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ es construible, entonces:*

i) *$\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ es construible para toda $m \in \mathbb{Z}$*

ii) *Los puntos de división de la lemniscata en n partes iguales son construibles*

iii) *Si además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{k}\right)$ es construible, entonces $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{[n;k]}\right)$ es construible, donde $[n;k]$ es el mínimo común múltiplo entre n y k*

Demostración:
El inciso ***i)*** es una consecuencia inmediata del Teorema 2.5, ya que gracias a éste sabemos que para toda $m \in \mathbb{Z}$ tendremos que $\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ es una función racional de $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$, y al ser este último un punto construible se sigue del Teorema E.1 del Apéndice E que entonces $\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$

también es construible. Una consecuencia de ***i)*** es que los puntos de división de la lemniscata en n partes iguales son construibles, ya que éstos son $\varphi_l\left(m\frac{2\varpi}{n}\right)$ con $m = 0, 2, \cdots, n-1$, por lo que queda probado el inciso ***ii)***. Finalmente para ver ***iii)*** recodemos que si $d = (n; k)$ es el máximo común divisor entre n y k y $l = [n; k]$ es el mínimo común múltiplo entre n y k, entonces:

$$l = \frac{nk}{d}$$

además es claro que existen $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\mu k + \nu n = d$$

notemos que entonces

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right) + \nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right) &= 2\varpi\left(\frac{\mu k + \nu n}{nk}\right) \\ &= 2\varpi\left(\frac{d}{nk}\right) \\ &= \frac{2\varpi}{l} \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{l}\right) = \varphi_l\left(\mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right) + \nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right)\right)$$

por lo que si utilizamos la fórmula de adición tenemos que:

$$\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{l}\right) = \frac{\varphi_l(\mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right))\varphi_l'(\nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right)) + \varphi_l(\nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right))\varphi_l'(\mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right))}{1 + \varphi_l^2(\mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right))\varphi_l^2(\nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right))} \tag{2.4}$$

y como por hipótesis $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ y $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{k}\right)$ son construibles, entonces de ***i)*** se sigue que $\varphi_l(\mu\left(\frac{2\varpi}{n}\right))$ y $\varphi_l(\nu\left(\frac{2\varpi}{k}\right))$ también son construibles al igual que sus derivadas (recordar la ecuación diferencial para φ_l), luego entonces como el denominador de (2.4) es distinto a cero concluimos, por el Teorema E.1 del Apéndice E, que (2.4) es construible, es decir que en efecto $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{l}\right)$ es construible. **q.e.d**

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del trabajo presentado hasta ahora

Teorema 2.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces los puntos de la división de la lemniscata en 2^n partes iguales son construibles*

Demostración:
Es claro que $\varphi_l(2\varpi) = 0$ es construible, por lo tanto gracias al Teorema 2.4 y a un argumento inductivo obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{2^n}\right)$ es construible. Por lo que gracias al inciso ***ii)*** del Teorema anterior tenemos que puntos de la división de la lemniscata en 2^n partes iguales son construibles. **q.e.d**

Finalmente concluimos la presentación de la lemniscata en $\mathbb{R}$ con un ejemplo más de cuando es posible la división de longitud de arco. Notemos como el ejemplo siguiente se apoya de gran forma en los últimos teoremas, a diferencia de los casos $n = 6$ y $n = 8$ tratados en los ejemplos anteriores:

Ejemplo 2.3. Para saber si los puntos de la división de la lemniscata en 5 partes iguales son construibles, por el Teorema 2.6 basta saber que $r_0 = \varphi_l(\frac{2\varpi}{5})$ lo es.

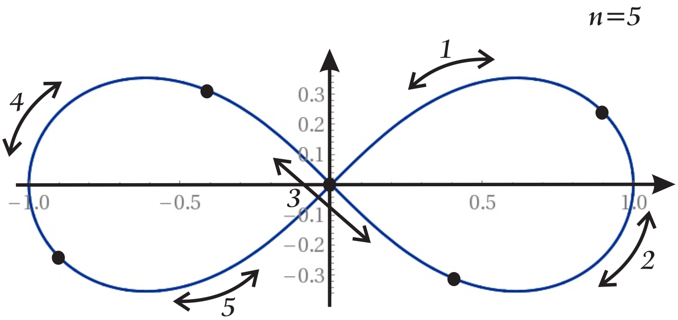


Figura 2.12: $n = 5$

Pero por la Proposición 2.5, como 5 es impar tenemos que r_0 es una raíz del polinomio de división $uP_5(u^4)$, además con el Teorema 2.5 obtenemos que :

$$P_5(u) = u^6 + 50u^5 - 125u^4 + 300u^3 - 105u^2 - 62u + 5$$

por lo que tenemos :

$$\begin{aligned} 0 &= r_0 P_5(r_0^4) \\ &= r_0 \left(r_0^{24} + 50r_0^{20} - 125r_0^{16} + 300r_0^{12} - 105r_0^{8} - 62r_0^{4} + 5\right) \\ &= r_0(r_0^8 - 2r_0^4 + 5)(r_0^{16} + 52r_0^{12} - 26r_0^8 - 12r_0^4 + 1) \end{aligned}$$

y con Maple notamos que las soluciones reales para la ecuación anterior son cuando :

$$r_0 = \sqrt[4]{-13 + 6\sqrt{5} \pm 2\sqrt{85 - 38\sqrt{5}}}$$

y por lo tanto concluimos que r_0 es construible y en consecuencia que los puntos de la división de la lemniscata en 5 partes iguales son construibles.

Al final del texto retomaremos las ideas aquí presentadas para extender la función φ_l a $\mathbb{C}$, veremos que dicha función es doblemente periódica. Así pues el análisis de las funciones doblemente periódicas se encuentra en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Funciones Doblemente Periódicas

En el Capítulo 1 definimos lo que es una función simplemente periódica de variable compleja, ver Definición 1.4, es natural preguntarnos si entonces existen funciones de variable compleja no constantes con dos periodos fundamentales no colineales, con tres periodos fundamentales no colineales, incluso con n periodos fundamentales no colinelaes para $n \in \mathbb{N}$. En el siguiente capítulo se verá que únicamente existen dichas funciones para $n \leq 2$ y trataremos las propiedades generales para el caso $n = 2$ es decir para las funciones doblemente periódicas.

3.1. Un Teorema de Jacobi

Definición 3.1. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica , decimos que los periodos $\omega_1, \cdots, \omega_n$ no colineales son* ***periodos fundamentales de f*** *si todo periodo de f es una combinación lineal entera de $\omega_1, \cdots, \omega_n$.*

El matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi probó en un artículo publicado en 1835 (ver [6] p.525), que una función periódica tiene a lo más dos periodos fundamentales ω_1, ω_2 tales que $(\omega_1/\omega_2) \notin \mathbb{R}$, es decir no colineales, ya que de existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $\omega_1 = t\omega_2$ tendríamos que $\mathfrak{Im}\,(\omega_1/\omega_2) = 0$ y por lo tanto tendríamos que $(\omega_1/\omega_2) = \mathfrak{Re}\,(\omega_1/\omega_2) \in \mathbb{R}$.

Figura 3.1: Carl G. J. Jacobi

Teorema 3.1. *(Jacobi 1835) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa, periódica y no constante, entonces la función tiene a lo más dos periodos fundamentales no colineales.*

Demostración:
Sea ω un periodo de f, por el Teorema 1.2 existe un periodo ω_1 tal que todo periodo contenido en la recta $\mathcal{L}$ que

une al 0 con ω_1 es de la forma $m\omega_1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto f tiene a ω_1 como un periodo fundamental. Sea Ω el conjunto de todos los periodos de f, entonces tenemos dos posibilidades:

Caso *i*): Todo punto de Ω esta contenido en $\mathcal{L}$. En este caso, en acorde con la Definición1.4, la función es simplemente periódica y sus únicos periodos fundamentales son ω_1 y $-\omega_1$,por lo que sólo existe un periodo fundamental no colineal.

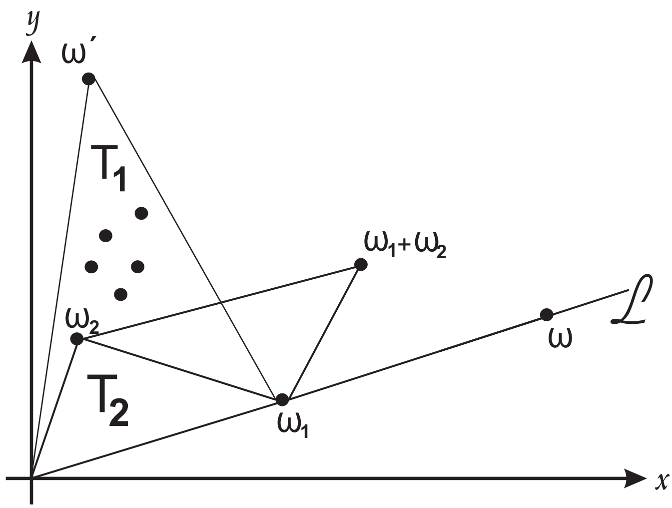


Figura 3.2: Teorema 3.1

Caso *ii*): No todos los puntos de Ω están en $\mathcal{L}$ (Ver Figura 3.2)
En este caso existe $\omega' \in \Omega$ tal que ω' no está en $\mathcal{L}$. Consideremos T_1 el triángulo con vértices $0, \omega_1, \omega'$, por consecuencia del Lema 1.1 T_1 contiene una cantidad finita de puntos de Ω, por lo que podemos elegir a $\omega_2 \in \Omega$ del interior de T_1 tal que si T_2 es el triángulo con vértices $0, \omega_1, \omega_2$, entonces los únicos periodos en T_2 son sus vértices (T_2 podría coincidir T_1).

Sea Δ el paralelogramo con vértices $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$, por lo que T_2 es la mitad de Δ. Supongamos que existe, $\hat{\omega}$, un punto de Ω en el interior de Δ, necesariamente tenemos que $\hat{\omega} \in \Delta \backslash T_2$. Notamos que $(\omega_1 + \omega_2) - \hat{\omega} \in \Omega$ pero también pertenece a T_2 (pues está a la misma distancia del origen que $\hat{\omega}$ del vértice $\omega_1 + \omega_2$) lo cual es imposible por la construcción de T_2. Por lo tanto tenemos que los únicos periodos en Δ son sus vértices.

Sea ahora $\widetilde{\omega}$ un punto arbitrario de Ω, al ser ω_1, ω_2 linealmente independientes, existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que :

$$\widetilde{\omega} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$$

Pero $t_1 = \lfloor t_1 \rfloor + r_1$ y $t_2 = \lfloor t_2 \rfloor + r_2$ donde $r_1, r_2 \in [0,1)$ y como $\lfloor t_1 \rfloor, \lfloor t_2 \rfloor \in \mathbb{Z}$ entonces $\lfloor t_1 \rfloor \omega_1, \lfloor t_2 \rfloor \omega_2 \in \Omega$ y por lo tanto :

$$\widetilde{\omega} - (\lfloor t_1 \rfloor \omega_1 + \lfloor t_2 \rfloor \omega_2) = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \in \Omega \tag{3.1}$$

Pero por construcción el periodo de (3.1) está en Δ y por lo tanto es alguno de sus vértices, luego entonces $r_1, r_2 \in \{0,1\}$ pero $r_1, r_2 \in [0,1)$ lo que implica que $r_1 = r_2 = 0$.
Por lo que cualquier punto $\widetilde{\omega} \in \Omega$ es de la forma :

$$\widetilde{\omega} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad \text{con} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto en este segundo caso ω_1 y ω_2 son periodos fundamentales no colineales, ya que cualquier otro periodo es combinación lineal de estos. **q.e.d**

Definición 3.2. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica. Decimos que f es* ***doblemente periódica*** *si existen dos periodos fundamentales no colineales ω_1, ω_2, es decir que todo periodo de f es de la forma $m\omega_1 + n\omega_2$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Una consecuencia inmediata del Teorema de Jacobi es que dada cualquier función f que sea periódica se tiene que f es simplemente periódica o bien es doblemente periódica.
En la Observación 1.2 vimos que cuando f es simplemente periódica con ω_1 un periodo fundamental, únicamente existe otro periodo fundamental y es $-\omega_1$. En el caso de que f sea doblemente periódica el Teorema de Jacobi nos asegura la existencia de ω_1, ω_2, dos periodos fundamentales no colineales, la pregunta a resolver es: ¿serán ω_1, ω_2 y $-\omega_1, -\omega_2$ los únicos periodos fundamentales de f? La respuesta es NO, como podemos ver en el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función doblemente periódica con periodos fundamentales ω_1, ω_2 no colineales entonces existen una* ***infinidad*** *de parejas de periodos fundamentales no colineales de f.*

Demostración:
Veamos primero que de existir ω_1', ω_2' otro par de periodos fundamentales no colineales entonces se tendría que:
Existen $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ y $m_1', n_1', m_2', n_2' \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\omega_1' = m_1\omega_1 + n_1\omega_2 \qquad\qquad \omega_1 = m_1'\omega_1' + n_1'\omega_2'$$
$$\omega_2' = m_2\omega_1 + n_2\omega_2 \qquad\qquad \omega_2 = m_2'\omega_1' + n_2'\omega_2'$$

Lo que se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}$$

Y notamos que las relaciones anteriores también son válidas si tomamos el conjugado de cada periodo fundamental, por lo que tenemos:

$$\begin{pmatrix} \omega_1' & \overline{\omega_1'} \\ \omega_2' & \overline{\omega_2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' & \overline{\omega_1'} \\ \omega_2' & \overline{\omega_2'} \end{pmatrix}$$

Lo que implica que:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Pero si $\omega_1 = a + ib$ y $\omega_2 = c + id$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ entonces:

$$det \begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix} = \omega_1\overline{\omega_2} - \omega_2\overline{\omega_1} = 2i(bc - ad) \neq 0$$

ya que $bc = ad$ si y sólo si $a/b = c/d$ lo que implicaría que ω_1 y ω_2 son colineales lo cual es imposible por hipótesis.
Por lo tanto la matriz $\begin{pmatrix} \omega_1 & \overline{\omega_1} \\ \omega_2 & \overline{\omega_2} \end{pmatrix}$ es invertible y multiplicado por la izquierda a (3.2) de ambos lados por la inversa de dicha matriz se sigue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

por lo que :

$$det \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 1$$

es decir:

$$det \begin{pmatrix} m_1' & n_1' \\ m_2' & n_2' \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} = \pm 1. \tag{3.3}$$

Veamos ahora que si m_1, n_1, m_2, n_2 satisfacen (3.3), equivalentemente $m_1n_2 - m_2n_1 = \pm 1$, entonces efectivamente ω_1' y ω_2' son periodos fundamentales de f:
Como:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= m_1\omega_1 + n_1\omega_2 \\ \omega_2' &= m_2\omega_1 + n_2\omega_2 \end{aligned}$$

Entonces usando que $m_1n_2 - m_2n_1 = \pm 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm(n_2\omega_1' - n_1\omega_2') \\ \omega_2 &= \pm(m_1\omega_2' - m_2\omega_1') \end{aligned}$$

Pero por hipótesis ω_1 y ω_2 son periodos fundamentales no colineales de f y por lo tanto cualquier periodo de f es una combinación lineal de ellos. Sea entonces $\widetilde{\omega}$ un periodo cualquiera de f entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega} &= m\omega_1 + n\omega_2 \\ &= \pm[m(n_2\omega_1' - n_1\omega_2') + n(m_1\omega_2' - m_2\omega_1')] \\ &= \pm[(mn_2 - nm_2)\omega_1' + (nm_1 - mn_1)\omega_2'] \end{aligned}$$

Por lo tanto $\widetilde{\omega}$ es una combinación lineal de ω_1' y ω_2', lo que implica que son periodos fundamentales de f.

Dado que existen una infinidad de números enteros m_1, n_1, m_2, n_2, que satisfacen (3.3) entonces existen una infinidad de periodos fundamentales no colineales para las funciones doblemente periódicas.

q.e.d

3.2. Funciones Elípticas

A continuación vamos a tratar con una clase particular de las funciones doblemente periódicas que son las funciones elípticas, la construcción explícita de dichas funciones se tratará hasta el siguiente capítulo, por ahora únicamente presentaremos las propiedades que deben de satisfacer en caso de existir. El objetivo principal de esta sección es dar a conocer las propiedades generales y los resultados más relevantes de las funciones elípticas los cuales se usaran ampliamente a lo largo del texto.

Definición 3.3. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función doblemente periódica si además f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ entonces decimos que f es* ***una función elíptica****.*

Observación 3.1. Al ser las funciones elípticas funciones doblemente periódicas, entonces si ω' y ω'' son cualquier par de periodos fundamentales no colineales de una función elíptica tendremos que :

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) \neq 0.$$

ya que ω' y ω'' no son colineales. A partir de este momento y en lo que sigue del texto seguiremos la siguiente notación:

$$\omega' = 2\omega_1 \text{ y } \omega'' = 2\omega_3 \quad \text{si} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) < 0.$$

$$\omega' = 2\omega_3 \text{ y } \omega'' = 2\omega_1 \quad \text{si} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) > 0.$$

En ambos casos $2\omega_2$ se define como $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$

Dada cualquier función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, definimos dos conceptos de suma importancia, que son el conjunto Ω y el paralelogramo fundamental Δ :

El Conjunto Ω

Sea f una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, entonces denotaremos por Ω al conjunto de todos los periodos de f, sabemos que dichos periodos siempre son una combinación lineal entera de los periodos fundamentales y por lo tanto:

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Proposición 3.1. *(Propiedades del conjunto Ω)*

i) *El conjunto de periodos de una función elíptica es **invariante bajo traslaciones**, es decir si $\omega \in \Omega$, entonces:*

$$\omega + \Omega = \Omega$$

ii) *Se cumple que* $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = -2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$

iii) *Se cumple que* $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 - 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$

iv) *Se cumple la propiedad de **simetría** es decir:* $\Omega = -\Omega$

Demostración:
Para ver $i)$ tomamos a $u \in \omega + \Omega$ lo que implica que existen $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $u = \omega + 2m\omega_1 + 2n\omega_3$. Como $\omega \in \Omega$ entonces existen $m', n' \in \mathbb{Z}$, tal que $\omega = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3$ y por lo tanto $u = 2(m + m')\omega_1 + 2(n + n')\omega_3$, lo que implica que $u \in \Omega$. Por otro lado si $u \in \Omega$ y $\omega = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3$ entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $u = 2(m+m')\omega_1 + 2(n+n')\omega_3$, es decir $u \in \omega + \Omega$

Para $ii)$ hacemos $m' = -m$ y como $m \in \mathbb{Z}$ entonces $m' \in \mathbb{Z}$ por lo que:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \mathbb{C} : \omega = -2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\} &= \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m'\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m', n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Omega.\end{aligned}$$

Similarmente para $iii)$ hacemos $n' = -n$ y como $n \in \mathbb{Z}$ entonces $n' \in \mathbb{Z}$ por lo que:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 - 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\} &= \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 + 2n'\omega_3 \text{ con } m, n' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Omega.\end{aligned}$$

Finalmente notamos que una combinación de $ii)$ con $iii)$ nos da $iv)$ ya que :

$$\begin{aligned}-\Omega &= \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = -2m\omega_1 - 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3 \text{ con } m', n' \in \mathbb{Z}\} = \Omega.\end{aligned}$$

q.e.d

El Paralelogramo Fundamental Δ

Dada una función elíptica f con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ definimos a γ como la frontera del paralelogramo con vértices $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$. Por la notación de la Observación 3.1 notamos que si esta curva se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj comenzando en 0, entonces pasa primero por $2\omega_1$ luego por $2\omega_2$ y finalmente por $2\omega_3$.
Definimos a Δ, el **paralelogramo fundamental** asociado a f, como la cerradura del interior de la curva γ excluyendo a los segmentos de recta que comparten a $2\omega_2$, es decir:

$$\Delta = \overline{int(\gamma)} \backslash ([2\omega_1 \to 2\omega_2] \cup [2\omega_2 \to 2\omega_3])$$

o bien otra manera de definirlo es agregándole al interior de la curva γ los segmentos de recta que unen al 0 con los periodos fundamentales sin incluir a estos últimos, es decir:

$$\Delta = int(\gamma) \cup [0 \to 2\omega_1) \cup [0 \to 2\omega_3)$$

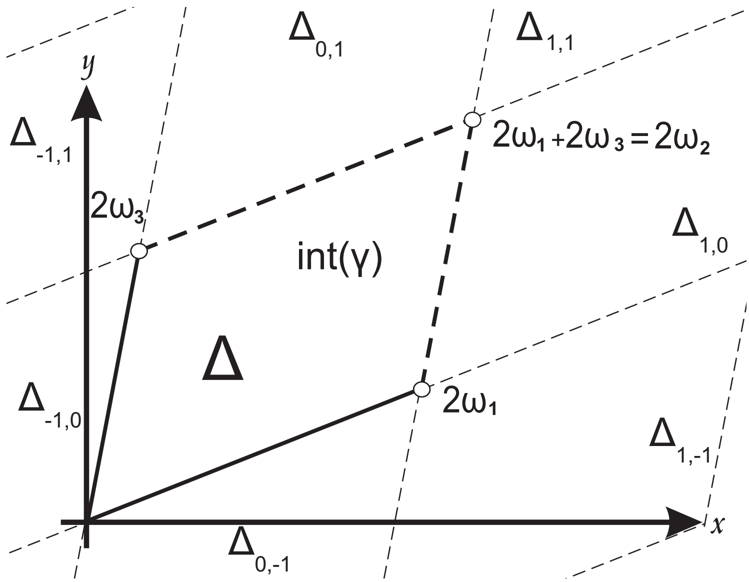


Figura 3.3: Paralelogramo Fundamental

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, definimos a $\Delta_{m,n}$ como el paralelogramo fundamental trasladado, es decir con vértices $2m\omega_1 + 2n\omega_3, (2m+2)\omega_1 + 2n\omega_3, (2m+2)\omega_1 + (2n+2)\omega_3, 2m\omega_1 + (2n+2)\omega_3$. Es claro que $\Delta_{0,0}$ es el paralelogramo fundamental Δ.

Observación 3.2. Notamos que el plano complejo es la unión disjunta de los paralelogramos $\Delta_{m,n}$, es decir los paralelogramos $\Delta_{m,n}$ son una partición de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} \Delta_{m,n}$$

Definición 3.4. *Decimos que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son* ***congruentes*** *relativos a los periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ de una función elíptica f si y sólo si $z_1 - z_2 \in \Omega$ y lo denotamos como:*

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\Omega}$$

Observación 3.3. i) Si $z_1 \equiv z_2 \pmod{\Omega}$, entonces $f(z_2) = f(z_2 + (z_1 - z_2)) = f(z_1)$.

ii) Ningun par de puntos distintos en algún paralelogramo $\Delta_{m,n}$ son congruentes relativos a Ω. Más aún dado cualquier $z \in \mathbb{C}$ y cualquier $\Delta_{m,n}$ existe un único punto $z' \in \Delta_{m,n}$ tal que $z \equiv z' \pmod{\Omega}$ (el caso en el que $z \in \Delta_{m,n}$ se tiene que $z' = z$).

El Teorema 3.2 nos asegura la existencia de una infinidad de periodos fundamentales, sin embargo el conjunto Ω asociado a cada par de periodos fundamentales es siempre el mismo, ya que es el conjunto de todos los periodos de una función elíptica. Pero el paralelogramo fundamental generado por cada par de periodos fundamentales es distinto según la elección de los periodos. El siguiente resultado nos muestra que una función elíptica se comporta exactamente igual en dichos paralelogramos, por lo que es independiente la elección de los periodos fundamentales:

Teorema 3.3. *Sea f una función elíptica con $2\omega_1, 2\omega_3$ un par de periodos fundamentales de f con paralelogramo fundamental asociado Δ y sean $2\widetilde{\omega}_1, 2\widetilde{\omega}_3$ un par distinto de periodos fundamentales con paralelogramo fundamental asociado $\widetilde{\Delta}$, entonces tenemos que $f(\Delta) = f(\widetilde{\Delta})$.*

Demostración:
Probaremos la igualdad por doble contención:

($\subseteq$) Sea $u \in f(\Delta)$ entonces existe $z \in \Delta$ tal que $f(z) = u$, pero por la Observación 3.3 sabemos que existe $z' \in \widetilde{\Delta}$ tal que $z \equiv z' \pmod{\Omega}$ por lo que $f(z) = f(z')$, y por lo tanto $u = f(z') \in f(\widetilde{\Delta})$ es decir $f(\Delta) \subseteq f(\widetilde{\Delta})$

($\supseteq$) Sea $v \in f(\widetilde{\Delta})$ entonces existe $z \in \widetilde{\Delta}$ tal que $f(z) = v$, pero por la Observación 3.3 sabemos que existe $z' \in \Delta$ tal que $z \equiv z' \pmod{\Omega}$ por lo que $f(z) = f(z')$, y por lo tanto $v = f(z') \in f(\Delta)$ es decir $f(\Delta) \supseteq f(\widetilde{\Delta})$

q.e.d

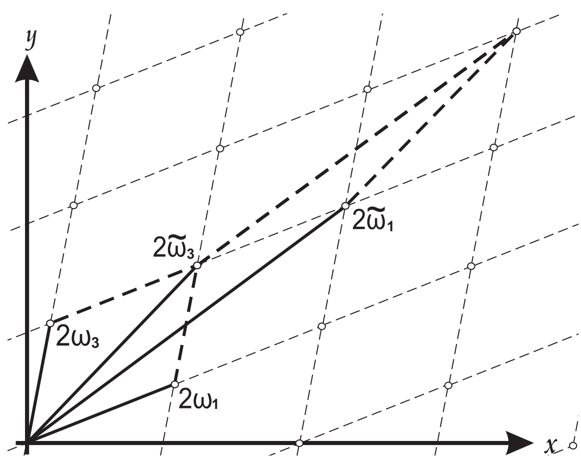


Figura 3.4: Ejemplo de Δ y $\widetilde{\Delta}$

En la Figura 3.4 podemos ver un caso particular de Δ y $\widetilde{\Delta}$. A ojo notamos que el área de

ambos paralelogramos es exactamente la misma, y veremos que esto es una consecuencia del Teorema 3.2, en particular en la Figura 3.4 podemos pensar a $\widetilde{\Delta}$ como una partición de Δ tomada de $\Delta, \Delta_{1,0}, \Delta_{1,1}$ y $\Delta_{2,1}$. Además vemos que los vértices de los paralelogramos $\widetilde{\Delta}_{m,n}$ coinciden con los de los paralelogramos $\Delta_{m,n}$, es decir con el conjunto Ω.
Así pues la siguiente proposición generaliza lo mostrado en el la Figura 3.4 acerca de las áreas de distintos paralelogramos fundamentales:

Proposición 3.2. *Sea f una función elíptica con $2\omega_1, 2\omega_3$ un par de periodos fundamentales de f con paralelogramo fundamental asociado Δ y sean $2\widetilde{\omega}_1, 2\widetilde{\omega}_3$ un par distinto de periodos fundamentales con paralelogramo fundamental asociado $\widetilde{\Delta}$, entonces tenemos que el área de Δ es la misma área que la de $\widetilde{\Delta}$.*

Demostración:
Un resultado clásico de Álgebra Lineal (ver [13] p 204) indica que si $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces el paralelogramo generado por u y v (es decir el que tiene vértices en 0,u,v y $u + v$) tiene área dada por:

$$\left| det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| .$$

Luego entonces se sigue que si $2\omega_1 = a + ib$ y $2\omega_3 = c + id$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\acute{A}rea(\Delta) = \left| det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - cb|$$

pero por otro lado por el Teorema 3.2 sabemos que existen $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que $m_1n_2 - m_2n_1 = \pm 1$ y son tales que:

$$\begin{aligned} 2\widetilde{\omega}_1 &= 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega_3 = (m_1a + n_1c) + i(m_1b + n_1d) \\ 2\widetilde{\omega}_3 &= 2m_2\omega_1 + 2n_2\omega_3 = (m_2a + n_2c) + i(m_2b + n_2d) \end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} \acute{A}rea(\widetilde{\Delta}) &= \left| det \begin{pmatrix} m_1a + n_1c & m_1b + n_1d \\ m_2a + n_2c & m_2b + n_2d \end{pmatrix} \right| \\ &= |(m_1a + n_1c)(m_2b + n_2d) - (m_2a + n_2c)(m_1b + n_1d)| \\ &= |m_1n_2ad + n_1m_2cb - m_2n_1ad - n_2m_1cb| \\ &= |(m_1n_2 - m_2n_1)ad + (n_1m_2 - n_2m_1)cb| \\ &= |(m_1n_2 - m_2n_1)(ad - cb)| \\ &= |(\pm 1)(ad - cb)| \\ &= |ad - cb| \\ &= \acute{A}rea(\Delta) \end{aligned}$$

por lo que concluimos que cualesquiera par de paralelogramos fundamentales de una función elíptica deben de tener la misma área. **q.e.d**

El aporte del conjunto Ω y del paralelogramo fundamental Δ a la teoría de las funciones elípticas es básico, ya que ahora sabemos que toda función elíptica se comporta exactamente igual en todo paralelogramo $\Delta_{m,n}$. Por lo tanto basta examinar el comportamiento en Δ para conocer por completo a la función. Además cada punto de Ω está asociado únicamente a un $\Delta_{m,n}$ pues cada paralelogramo contiene únicamente un vértice y todo vértice pertenece a Ω.

Teorema 3.4. *La clase de funciones elípticas con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ es cerrada bajo las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y diferenciación.*

Demostración:
Sean f, g dos funciones elípticas con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y sea $\omega \in \Omega$ entonces:

i) $[f \pm g](z+\omega) = f(z+\omega) \pm g(z+\omega) = f(z) \pm g(z) = [f \pm g](z)$, y además como f y g son meromorfas entonces $f \pm g$ también lo es y por lo tanto es elíptica.

ii) $[fg](z+\omega) = f(z+\omega)g(z+\omega) = f(z)g(z) = [fg](z)$, y además como f y g son meromorfas entonces fg también lo es y por lo tanto es elíptica.

iii) $[f/g](z+\omega) = f(z+\omega)/g(z+\omega) = f(z)/g(z) = [f/g](z)$, y además como f y g son meromorfas entonces f/g también lo es y por lo tanto es elíptica.

iv) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f es analítica en z_0 entonces existe $f'(z_0)$ y tenemos que:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z+\omega) - f(z_0+\omega)}{z + \omega - (z_0 + \omega)} = f'(z_0 + \omega)$$

por lo tanto f' también es doblemente periódica y al ser analítica en todos los puntos donde f es analítica, entonces f' también es meromorfa y por ende elíptica.

q.e.d

Observación 3.4. Más adelante veremos qué pasa cuando se integra una función elíptica, pues el resultado no siempre es otra función elíptica.

3.3. Los Teoremas de Liouville

Figura 3.5: Joseph Liouville

A continuación presentamos el desarrollo de tres teoremas (1847) en los cuales el matemático francés Joseph Liouville basó sus lecciones sobre las funciones doblemente periódicas (ver [17]). Liouville tuvo un genuino interés por las funciones elípticas y como veremos más adelante, sus tres teoremas son fundamentales para el desarrollo de la teoría de dichas funciones. Esta sección consiste en enunciar y probar dichos teoremas acompañados de la teoría y de las definiciones necesarias para entenderlos.

Teorema 3.5. *(Primer Teorema de Liouville) Sea f una función elíptica y entera, entonces f es una función constante.*

Demostración:
Como f es entera entonces no tiene polos, además al ser doblemente periódica el comportamiento de la función está totalmente determinado por el paralelogramo fundamental Δ, es decir $f(\mathbb{C}) = f(\overline{\Delta})$, pero $\overline{\Delta}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y por el Teorema B.3 (Weierstrass) del Apéndice B, tenemos que f es acotada en todo $\mathbb{C}$, por lo que existe $M \in [0, \infty)$ tal que:

$$|f(z)| \leq M \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

entonces por el Teorema B.4 (Liouville) del Apéndice B, tenemos que en efecto f es una función constante.

q.e.d

Observación 3.5. Aunque el conocido Teorema B.4 del Apéndice B es llamado "el Teorema de Liouville", se debe originalmente al matemático francés Augustin Louis Cauchy (ver [7] y [27] p. 105). Sin embargo fue porque Liouville lo enseñó en sus cursos [17] que la comunidad matemática se lo atribuyó a él.

Proposición 3.3. *Sea f una función elíptica no constante, entonces f tiene al menos un polo en Δ. Más aún el número de polos en Δ es finito.*

Demostración:
Supongamos que f no tiene polos en Δ entonces f no tiene polos en $\mathbb{C}$, lo que implica que f es entera y por lo tanto gracias al Teorema anterior (Primer Teorema de Liouville) se tiene que f es una función constante, contradiciendo así la hipótesis. Así pues f tiene al menos un polo en Δ.
Supongamos ahora que existe una infinidad de polos en Δ, luego entonces $\overline{\Delta}$ contiene un punto de acumulación de polos y por lo tanto f no es meromorfa, pero esto contradice la hipótesis ya que f es elíptica. Entonces hay un número finito de polos en Δ.

q.e.d

Definición 3.5. *Sea f una función elíptica con paralelogramo fundamental Δ, llamamos el **orden de f** al número total de polos en Δ donde cada polo debe contarse tantas veces como su orden. Denotamos al orden de f como:*

$$ord(f, \Delta)$$

Ejemplo 3.1. Sea f una función elíptica con paralelogramo fundamental Δ y sean z_1, z_2, z_3 los polos de f en Δ donde z_k es un polo de orden k, entonces:

$$ord(f, \Delta) = \underbrace{1}_{z_1} + \underbrace{1+1}_{z_2} + \underbrace{1+1+1}_{z_3} = 6$$

Por lo tanto el orden de f es 6.

Teorema 3.6. *(Segundo Teorema de Liouville) Sea f una función elíptica, entonces la suma de los residuos de f sobre todos los polos en Δ es igual a cero.*

Demostración:
Sea E el conjunto de todos los puntos de $\partial\Delta\backslash\Delta$ entonces:

$$E = [2\omega_1 \to 2\omega_2] \cup [2\omega_2 \to 2\omega_3]$$

y sea $P(\Delta) = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ el conjunto de todos los polos de f en Δ. Definimos a Δ' según sea el caso:
Caso *i*): Si $\partial\Delta \cap P(\Delta) = \emptyset$ entonces decimos que $\Delta' = \Delta$.

Caso *ii*): Si $\partial\Delta \cap P(\Delta) \neq \emptyset$ entonces definimos a ρ como:

$$\rho = \min_{z_i \in P(\Delta)} d(z_i, E)$$

y decimos que Δ' es el paralelogramo trasladado por una cantidad menor a ρ a lo largo de la diagonal $[2\omega_2 \to 0]$. La Figura 3.6 muestra dicho traslado para una función elíptica con 6 polos en Δ, los puntos rellenos son polos en Δ mientras que los puntos vacíos son polos fuera de Δ:

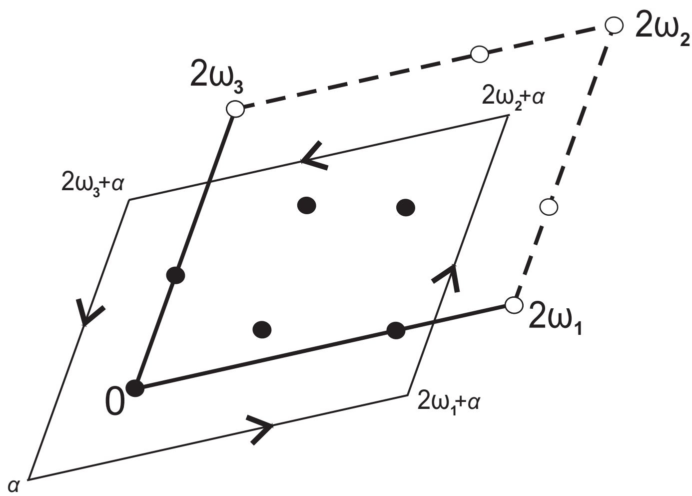


Figura 3.6: Δ y Δ'

Como la función es doblemente periódica es claro que para ambos casos $f(\Delta) = f(\Delta')$ y que además $P(\Delta) = P(\Delta')$. Gracias a el traslado existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que los vértices de Δ' son: $\alpha, 2\omega_1 + \alpha, 2\omega_2 + \alpha$ y $2\omega_3 + \alpha$, es decir los vértices de Δ recorridos por α (notamos que para el

Caso *i)* $\alpha = 0$). Definimos a la curva $\gamma = \partial\Delta'$ orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, como muestra la Figura 3.6 por lo tanto γ es una curva cerrada que encierra a todos los polos de $P(\Delta)$ y no pasa por ninguno de ellos, por lo tanto :

$$\sum_{z_k \in P(\Delta)} Res(f, z_k) = \sum_{z_k \in P(\Delta')} Res(f, z_k) = \sum_{z_k \in int(\gamma)} Res(f, z_k) = \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Aplicando el Teorema B.5(Teorema del Residuo) del Apéndice B, obtenemos que:

$$\sum_{z_k \in P(\Delta)} Res(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz. \tag{3.4}$$

Pero por otro lado si denotamos a:

$$\int_{[a \to b]} f(z)dz \quad \text{como} \quad \int_{a}^{b} f(z)dz$$

donde el segmento $[a \to b]$ se parametriza como : $a(1-t) + bt$ para $t \in [0, 1]$, entonces la integral de (3.4) se parte como:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(z)dz \tag{3.5}$$

Pero aplicando el cambio de variable $u = z - 2\omega_3$ a la tercera integral de (3.5) y $u = z + 2\omega_1$ a la cuarta integral de (3.5) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha} f(u + 2\omega_3)du + \int_{\alpha+2\omega_2}^{\alpha+2\omega_1} f(u - 2\omega_1)du \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha} f(u)du + \int_{\alpha+2\omega_2}^{\alpha+2\omega_1} f(u)du \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(z)dz - \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(u)du - \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(u)du \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(z)dz - \left(\int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(u)du + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} f(u)du \right) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{z_k \in P(\Delta)} Res(f, z_k) = 0.$$

q.e.d

Gracias a la doble periodicidad de las funciones elípticas, el segundo Teorema de Liouville es válido para todos los Δ obtenidos con cualquier par de periodos fundamentales, que como vimos en el Teorema 3.2, existen una infinidad. Además es claro que es válido en todas las traslaciones $\Delta_{m,n}$ de esta infinidad de paralelogramos fundamentales.

Proposición 3.4. *Sea f una función elíptica no constante, entonces:*

$$ord(f, \Delta) \geq 2$$

Demostración:
Supongamos que $ord(f, \Delta) = 0$, entonces f no tiene polos en Δ lo que contradice la Proposición (3.3) y por lo tanto $ord(f, \Delta) \geq 1$.
Si suponemos que $ord(f, \Delta) = 1$, entonces f tiene un polo simple en Δ, llamémoslo z_0, pero por la serie de Laurent tenemos que :

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pero por el Teorema 3.6(Segundo Teorema de Liouville) tenemos que:

$$b_1 = Res(f, z_0) = \sum_{z_k \in P(\Delta)} Res(f, z_k) = 0$$

entonces en realidad f no tiene polos en Δ y de nuevo esto contradice la Proposición (3.3) y por lo tanto $ord(f, \Delta) \geq 2$.

q.e.d

Definición 3.6. *Sean $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función y $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto arbitrario, si $f(z_0) = a$ decimos que z_0 es un **a-punto** de f.*

Si z_0 es un a-punto de una función analítica alrededor de z_0 entonces por el Teorema A.1 (Taylor) del Apéndice A, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots \\ &= a + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

Además si f es no constante entonces al menos una de las derivadas de f evaluadas en z_0 tiene que ser distinta de 0 ya que de lo contrario, por Taylor, $f(z) = f(z_0)$ para toda z alrededor de z_0 y f sería constante lo cual es imposible. Sea k el primer número natural tal que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ entonces:

$$f(z) - a = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$$

si $k=1$ decimos que z_0 es un ***a*-punto simple** y vemos que:

$$f'(z_0) \neq 0$$

si $k>1$ decimos que z_0 es un ***a*-punto de orden *k*** y vemos que:

$$f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ y que } f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Notamos que si f es una función elíptica no constante y si $A = \{z_0 \in G : z_0 \text{ es un } a\text{-punto de } f\}$ entonces Δ contiene una cantidad finita de puntos de A, ya que de lo contrario A tendría un punto de acumulación en Δ contradiciendo así el hecho de que f es elíptica y no constante.

Observación 3.6. Sea z_0 un a-punto de orden k para una función f entonces:

i) Si $a=0$, entonces z_0 es un cero de orden k de la función f.

ii) Si $a=\infty$, entonces z_0 es un polo de orden k de la función f.

Definición 3.7. *Sea f una función elíptica, definimos $n(a) \in \mathbb{N}$ como* ***el número total de a-puntos de f*** *en Δ, contados tantas veces como su orden. Notamos que $n(\infty) = ord(f,\Delta)$.*

Teorema 3.7. *(Tercer Teorema de Liouville) Sea f una función elíptica no constante y sea $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto arbitrario, entonces $n(a) = ord(f,\Delta)$, es decir que en Δ el número de a-puntos es el mismo que de polos, contados cada uno el mismo número de veces que sus órdenes.*

Demostración:
Si $a=\infty$ entonces por la Definición 3.7, el resultado es obvio.
Supongamos entonces que $a \neq \infty$ y definimos a Δ' de manera similar a como se definió en el Teorema 3.6 (Segundo Teorema de Liouville) pero ahora a $P(\Delta)$ lo tomamos como el conjunto de todos los polos y los a-puntos en Δ, es decir:

$$P(\Delta) = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$

donde cada b_j es un polo de orden β_j $(j=1,2,\cdots,n)$ y cada a_k es un a-punto de orden α_k $(k=1,2,\cdots,m)$. Entonces si $\gamma = \partial\Delta'$, se tiene que γ es una curva cerrada, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (recordar Figura 3.6), que no pasa por ningún polo y por ningún a-punto de f y que además encierra a todos los puntos de $P(\Delta)$. Por el Teorema B.6 (Principio del Argumento) del Apéndice B, tenemos que si $g \equiv 1$ entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k - \sum_{j=1}^{n}\beta_j = n(a) - n(\infty)$$

Sea φ la función dada por:

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-a}$$

pero por el Teorema 3.4 sabemos que φ es una función elíptica con los mismos periodos fundamentales que f. Notamos que los polos y los a-puntos de f en Δ, es decir los puntos de $P(\Delta)$, son los polos de φ en Δ. Por lo tanto, debido a la construcción de Δ' tenemos que γ encierra a todos los polos de φ y no pasa por ninguno de ellos. Aplicando el Teorema 3.6 (Segundo Teorema de Liouville), obtenemos que:

$$0 = \sum_{z_k \in P(\Delta)} Res(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \sum_{j=1}^{n} \beta_j = n(a) - n(\infty) = 0.$$

Tenemos entonces que $n(a) = n(\infty) = ord(f, \Delta)$

q.e.d

Es claro que el tercer Teorema de Liouville es también valido para todos los Δ obtenidos con cualquier par de periodos fundamentales. Por lo tanto vemos que el orden de una función elíptica nos da la información del número total de polos, que será el mismo que el número total de a-puntos, en ambos casos contados tantas veces como sus órdenes y en cualquier paralelogramo Δ independientemente del par de periodos fundamentales que tomemos.

Definición 3.8. *Sea f una función elíptica, definimos $s(a) \in \mathbb{C}$ como* ***la suma de los a-puntos de f*** *en Δ, cada a-punto es sumado tantas veces como su orden.*

Teorema 3.8. *Sea f una función elíptica no constante y sea $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto arbitrario, entonces se cumple que:*

$$s(a) \equiv s(\infty) \pmod{\Omega}$$

Demostración:

Si $a = \infty$ entonces $s(a) - s(\infty) = 0 \in \Omega$ y por lo tanto el resultado es obvio.

Supongamos entonces que $a \neq \infty$ y sea Δ' como en la demostración del Teorema 3.7 (Tercer Teorema de Liouville), entonces si $\gamma = \partial \Delta'$, tenemos que γ es una curva cerrada, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (recordar Figura 3.6), que no pasa por ningún polo y por ningún a-punto de f y que además encierra a todos los puntos de $P(\Delta)$ con:

$$P(\Delta) = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots, a_m\},$$

donde cada b_j es un polo de f de orden β_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ y cada a_k es un a-punto de f de orden α_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$. Por el Teorema B.6 (Principio del Argumento) del Apéndice B, tenemos que si g es la función identidad, i.e $g(z) = z$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k - \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = s(a) - s(\infty) \tag{3.6}$$

Sea ψ la función dada por:

$$\psi(z) = z \frac{f'(z)}{f(z) - a}$$

Pero recordando la demostración del Teorema 3.6 (Segundo Teorema de Liouville), sabemos que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que los vértices de Δ' son: $\alpha, 2\omega_1 + \alpha, 2\omega_2 + \alpha$ y $2\omega_3 + \alpha$ y por lo tanto la integral de 3.6 se parte como:

$$\int\limits_{\gamma} z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \int\limits_{\gamma} \psi(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \psi(z)dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} \psi(z)dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} \psi(z)dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} \psi(z)dz.$$

Si aplicamos el cambio de variable $u = z - 2\omega_3$ y $u = z + 2\omega_1$ a la tercera y cuarta integral respectivamente, de la suma anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \psi(z)dz &= \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \psi(z)dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} \psi(z)dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha} \psi(u+2\omega_3)du + \int\limits_{\alpha+2\omega_2}^{\alpha+2\omega_1} \psi(u-2\omega_1)du \\
&= \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} (\psi(z) - \psi(z+2\omega_3))dz + \int\limits_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} (\psi(z) - \psi(z-2\omega_1))dz
\end{aligned}$$

pero vemos que :

$$\begin{aligned}
\psi(z) - \psi(z+2\omega_3) &= z\frac{f'(z)}{f(z)-a} - (z+2\omega_3)\frac{f'(z+2\omega_3)}{f(z+2\omega_3)-a} \\
&= z\frac{f'(z)}{f(z)-a} - (z+2\omega_3)\frac{f'(z)}{f(z)-a} \\
&= -2\omega_3\frac{f'(z)}{f(z)-a}
\end{aligned}$$

y análogamente se verifica que $\psi(z) - \psi(z-2\omega_1) = 2\omega_1[f'(z)/(f(z)-a)]$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \psi(z)dz &= 2\omega_1 \int\limits_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz - 2\omega_3 \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz \\
&= 2\omega_1(\ln(f(z)-a))\Big|_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_2} - 2\omega_3(\ln(f(z)-a))\Big|_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1}
\end{aligned}$$

Pero como $\ln(f(z))$ toma los mismos valores cuando $z = \alpha + 2\omega_1$ que cuando $z = \alpha + 2\omega_2$ entonces $\ln(f(\alpha+2\omega_2)) - \ln(f(\alpha+2\omega_1)) = m2\pi i$ con $m \in \mathbb{Z}$ y análogamente notamos que $\ln(f(\alpha+2\omega_1)) - \ln(f(\alpha)) = n2\pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto:

$$\int\limits_{\gamma} \psi(z)dz = 2\pi i(2m\omega_1 - 2n\omega_3)$$

y por (3.6) tenemos que $s(a) - s(\infty) = 2m\omega_1 - 2n\omega_3 \in \Omega$ lo que implica que:

$$s(a) \equiv s(\infty) \pmod{\Omega}$$

q.e.d

De nuevo es claro que el teorema anterior es válido para todos los Δ obtenidos con cualquier par de periodos fundamentales.

Capítulo 4

Teoría de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass fue un matemático alemán cuyos aportes a las matemáticas son invaluables. Es recordado por impulsar el rigor en el análisis matemático y por su extenso trabajo en el campo de la teoría de las funciones. Dicho trabajo se basó fuertemente en la posibilidad de expandir funciones analíticas en series de potencias convergentes, en particular el Teorema A.2 (Laurent) fue enunciado y probado por Weierstrass desde 1841 (ver [21]), sin embargo nunca lo publicó y es por eso que se lo adjudicamos al matemático francés Pierre Alphonse Laurent quien lo publicó, sin conocer el trabajo de Weierstrass, en el año de 1843.

Figura 4.1: Karl Weierstrass

En el Capítulo 3 estudiamos a las funciones doblemente periódicas, en particular a las funciones elípticas. Sin embargo únicamente sabemos que de existir dichas funciones, cumplirán ciertas propiedades generales, pero no conocemos la forma explícita de alguna función elíptica. Es debida a Weierstrass la construcción de una función elíptica en particular que asegura la existencia de dichas funciones, es llamada la función $\wp$ de Weierstrass, que es de suma importancia, ya que veremos que cualquier otra función elíptica guarda una profunda relación con la función $\wp$.

4.1. Preliminares

El objetivo de esta sección es asentar las bases para la construcción de la función $\wp$, es decir presentaremos los conceptos, definiciones y resultados necesarios para el posterior análisis de dicha función.
Para comenzar introducimos una notación que nos será de suma utilidad para el tratamiento de series dobles, esta notación es simplemente una manera particular de sumar los términos de una serie que no altera el resultado cuando existe convergencia:

Sean $2\omega_1$ y $2\omega_3$ un par de puntos no colineales, y sea el conjunto Ω el de todas las combinaciones lineales enteras de estos puntos (ver Capítulo 3) y sea $h : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, entonces denotaremos a:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(2m\omega_1 + 2n\omega_3) \equiv \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} h(2m\omega_1 + 2n\omega_3) \tag{4.1}$$

como:

$$\sum_{\omega\in\Omega} h(w).$$

Cuando la serie de (4.1) no toma en cuenta al caso $m = n = 0$, entonces la denotamos como:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' h(w).$$

Lema 4.1. *La serie:*

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{|\omega|^{\lambda}} \tag{4.2}$$

converge para $\lambda > 2$ y diverge para $\lambda \leq 2$.

Demostración:
Sea P_k el paralelogramo con vértices: $2k\omega_1 + 2k\omega_3, -2k\omega_1 + 2k\omega_3, -2k\omega_1 - 2k\omega_3, 2k\omega_1 - 2k\omega_3$

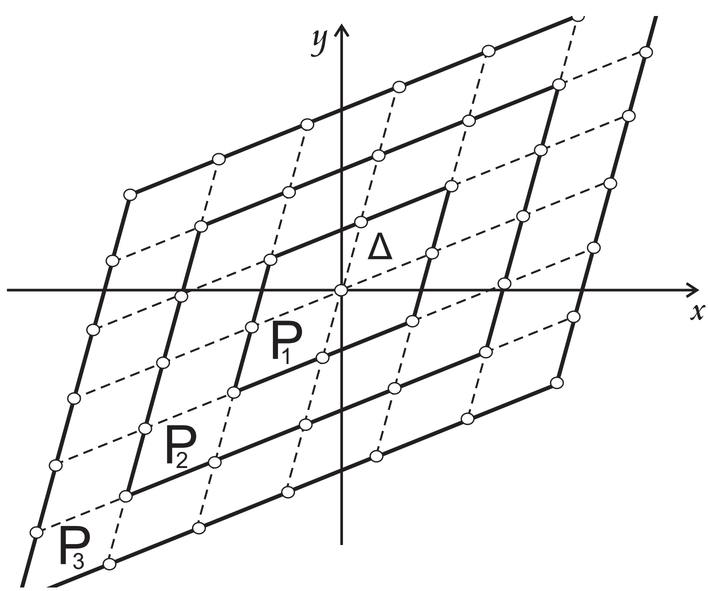


Figura 4.2: P_k con $k = 1, 2, 3$

Vemos en la Figura 4.2 que la frontera de cada paralelogramo, ∂P_k, son los contornos no punteados y además notamos que los puntos blancos son los puntos del conjunto Ω.
Si ahora:

$$d = \min_{z \in \partial P_1} |z| \quad \text{y} \quad D = \max_{z \in \partial P_1} |z|$$

entonces es claro que :

$$kd = \min_{z \in \partial P_k} |z| \quad \text{y} \quad kD = \max_{z \in \partial P_k} |z|$$

Observamos en la Figura 4.2 que ∂P_1 tiene a 8 puntos de Ω, ∂P_2 tiene a 16 puntos de Ω y que ∂P_3 tiene a 32 puntos de Ω.
En realidad cada P_k tiene en cada lado $2k+1$ puntos de Ω, por lo tanto tomando en cuenta los 4 lados de cada paralelogramo y quitando los 4 puntos que se repiten por los vértices, notamos que para todo k, ∂P_k tiene $4(2k+1)-4 = 8k$ puntos de Ω.
Para cada k denotamos a cada uno de estos $8k$ puntos como z_j con $j = 1, 2, \cdots, 8k$, es decir $\{z_1, z_2, \cdots, z_{8k}\} = \Omega \cap \partial P_k$ y notamos que cada uno de estos puntos contribuye a la serie de (4.2) con el término:

$$\frac{1}{|z_j|^\lambda} \quad \text{para toda} \;\; j = 1, 2, \cdots, 8k$$

y como cada z_j pertenece a P_k entonces tenemos que:

$$kd \leq |z_j| \leq kD \quad \text{para toda} \;\; j = 1, 2, \cdots, 8k$$

por lo tanto:

$$\frac{8}{D^\lambda k^{\lambda-1}} = \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{(kD)^\lambda} \leq \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{|z_j|^\lambda} \leq \sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{(kd)^\lambda} = \frac{8}{d^\lambda k^{\lambda-1}}. \tag{4.3}$$

Pero es claro que la serie de (4.2) también se puede expresar como:

$$\sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{1}{|\omega|^\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{8k} \frac{1}{|z_j|^\lambda} \right)$$

así pues usando la desigualdad (4.3) tenemos que:

$$\frac{8}{D^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda-1}} \leq \sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{1}{|\omega|^\lambda} \leq \frac{8}{d^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\lambda-1}} \tag{4.4}$$

pero sabemos que la serie que se encuentra en ambos extremos de (4.4) es la serie hiperarmónica (o serie-p), por lo que será convergente siempre que $\lambda - 1 > 1$ y divergente cuando $\lambda - 1 \leq 1$, es decir convergente si $\lambda > 2$ y divergente cuando $\lambda \leq 2$. Por lo tanto, como $d, D \geq 0$, si $\lambda > 2$ tenemos que la serie de (4.2) está acotada por arriba por un número finito y por lo tanto converge, mientras que si $\lambda \leq 2$ la serie de (4.2) está acotada por abajo por una serie divergente y por ende diverge.

q.e.d

El hecho de que la serie del Lema 4.1 converja es fundamental para ver la convergencia de muchas otras series a lo largo de este capítulo.

A continuación analizaremos las propiedades de una función, que será la primera función elíptica que daremos explícitamente. El motivo para exponer esta función primeramente es que es sencilla de presentar y guarda una relación con la función $\wp$ de Weierestrass que es una función un poco más compleja pero de mucha más relevancia en el estudio de las funciones elípticas.

Teorema 4.1. *La serie:*

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3} \tag{4.5}$$

es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyos polos son todos de orden 3 y además coinciden con los puntos del conjunto Ω.

Demostración:
Sea $R > 0$ y $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ el disco abierto de radio R centrado en 0, es claro que si $\omega \in \Omega$ se tiene que $|\omega| \leq 2R$ ó que $|\omega| > 2R$ entonces podemos expresar a (4.5) como:

$$f(z) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| \leq 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| > 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

Para caso en el que $z \in D_R(0)$ y $|\omega| > 2R$, es claro que :

$$i) : \ |\omega| > 2|z| > |z|, \quad ii) : \frac{|z|}{|w|} < \frac{1}{2}$$

por lo tanto si usamos la otra desigualdad del triángulo y los dos inicios anteriores:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\omega)^3} \right| &\leq \frac{1}{\Big| |z| - |\omega| \Big|^3} \overset{i)}{=} \frac{1}{(|\omega| - |z|)^3} \\ &= \frac{1}{|\omega|^3 (1 - \frac{|z|}{|\omega|})^3} \overset{ii)}{<} \frac{2^3}{|\omega|^3} = \frac{8}{|\omega|^3} \end{aligned}$$

pero por el Lema 4.1 sabemos que:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| > 2R}} \frac{8}{|\omega|^3} < \infty$$

por lo tanto por el Teorema B.7 (Prueba M de Weierstrass) tenemos que :

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |\omega| > 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

converge absoluta y uniformemente en $D_R(0)$ y además es analítica en $D_R(0)$ ya que para todo ω tal que $|\omega| > 2R$ se tiene que:

$$g(z) = \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

es una función analítica en $D_R(0)$.

Para el caso en el que $z \in D_R(0)$ y $|\omega| \leq 2R$ la serie :

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ |\omega|\leq 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

tiene un número finito de sumandos y además es analítica en$D_R(0)$ excepto en un número finito de puntos $\{z_1, z_2, \cdots z_n\} = D_R(0) \cap \Omega$, donde es claro que cada punto de este conjunto es un polo de orden 3, ya que si $z_j \in D_R(0) \cap \Omega$ entonces:

$$\lim_{z\to z_j} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ |\omega|\leq 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3} = \infty$$

y si $k \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\lim_{z\to z_j} (z-z_j)^k \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ |\omega|\leq 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3} = \lim_{z\to z_j} \frac{1}{(z-z_j)^{3-k}} + \lim_{z\to z_j} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\setminus\{z_j\} \\ |\omega|\leq 2R \text{ y}}} \frac{(z-z_j)^k}{(z-\omega)^3} = \lim_{z\to z_j} \frac{1}{(z-z_j)^{3-k}}$$

se sigue entonces que:

$$\lim_{z\to z_j} (z-z_j)^k \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ |\omega|\leq 2R}} \frac{1}{(z-\omega)^3} = \begin{cases} \infty & si \quad k = 1, 2 \\ 1 & si \quad k = 3 \\ 0 & si \quad k > 3 \end{cases}$$

Entonces (4.5) es una función meromorfa en $D_R(0)$ y sus polos son de orden 3 y coinciden con el conjunto $D_R(0) \cap \Omega$, pero $R > 0$ es arbitraria, entonces notando que:

$$\bigcup_{R>0} D_R(0) = \mathbb{C}$$

se sigue que (4.5) es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y todos sus polos son de orden 3 y coinciden con los puntos del conjunto $\mathbb{C} \cap \Omega = \Omega$.

q.e.d

Lo más importante de la función representada por la serie en (4.5) es que es doblemente periódica y por ser meromorfa entonces es también elíptica, como veremos en seguida:

Teorema 4.2. *La función f dada por:*

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3},$$

es una función impar y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y además $ord(f, \Delta) = 3$.

Demostración:
Recordando que $\Omega = -\Omega$ (Simetría), ver Proposición 3.1 (Propiedades del conjunto Ω), y notamos entonces que:

$$f(-z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(-z-\omega)^3} = -\sum_{\omega' \in -\Omega} \frac{1}{(z-\omega')^3} = -\sum_{\omega' \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega')^3} = -f(z)$$

donde el hecho de que la serie con el orden de los sumandos invertido siga convergiendo a $f(z)$ está garantizado por la convergencia absoluta de dicha serie y por lo tanto, en efecto, f es una función impar.
Similarmente vimos que Ω es invariante bajo traslaciones, es decir que si $\omega \in \Omega$ entonces se tiene que $\omega + \Omega = \Omega$, por lo tanto como $\pm 2\omega_1, \pm 2\omega_3 \in \Omega$ tenemos que $\pm 2\omega_j + \Omega = \Omega$ para $j = 1, 3$. Luego entonces, si $j = 1, 3$ tenemos que de nuevo gracias a la convergencia absoluta de f la serie es la misma si modificamos el orden de los sumandos, entonces:

$$f(z+2\omega_j) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z+2\omega_j-\omega)^3} = \sum_{\omega' \in -2\omega_j+\Omega} \frac{1}{(z-\omega')^3} = \sum_{\omega' \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega')^3} = f(z)$$

y por lo tanto :

$$f(z+2\omega_1) = f(z)$$
$$f(z+2\omega_3) = f(z)$$

es decir $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son periodos de f, pero nada nos asegura que estos sean los fundamentales. Para ver que en efecto $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son periodos fundamentales, tomamos a $\widetilde{\omega}$ cualquier periodo de f. Sea $\omega \in \Omega$ por lo que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ y además por el Teorema 4.1 sabemos que ω es un polo de f y por lo tanto tenemos que $\omega + \widetilde{\omega}$ es también un polo de f , por lo que $\omega + \widetilde{\omega} \in \Omega$, entonces existen $m', n' \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega + \widetilde{\omega} = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega} &= (\omega + \widetilde{\omega}) - \omega \\ &= 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3 - (2m\omega_1 + 2n\omega_3) \\ &= 2(m'-m)\omega_1 + 2(n'-n)\omega_3 \in \Omega \end{aligned}$$

entonces todo periodo arbitrario $\widetilde{\omega}$ de f se escribe como combinación lineal de $2\omega_1$ y $2\omega_3$, por ende estos son los periodos fundamentales, y como f es una función meromorfa y es doblemente periódica, concluimos que f es una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.
Es claro que $\Delta \cap \Omega = \{0\}$ por lo tanto por Teorema 4.1 ,el el único polo de f en Δ es el 0 y además es de orden 3, por lo tanto:

$$ord(f, \Delta) = 3$$

q.e.d

Observación 4.1. Es claro que entonces el conjunto Ω es el conjunto de todos los periodos de f y que además cada punto en Ω es también un polo de orden 3.

4.2. Función $\wp$ de Weierstrass

Figura 4.3: Letra $\wp$

La función $\wp$ de Weierstrass es la base de la teoría de las funciones elípticas desarrollada por el mismo Karl Weierstrass. Tradicionalmente se denotaba a esta función con una letra "p" minúscula escrita en la fuente más elegante posible. Hoy en día la Figura 4.3 representa la fuente universal en la que se representa dicha función, y además en el mundo de la caligrafía la letra $\wp$ de la figura es conocida como "*La pe de Weierstrass*"

Para su construcción vamos a recurrir a la función presentada al final de la sección anterior:

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

Vimos que esta función f es elíptica, de orden 3 y con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, y su el conjunto de todos sus periodos es Ω.

Para empezar notemos que la función F dada por:

$$F(z) = -\frac{1}{2(z-\omega)^2}$$

es tal que :

$$F'(z) = \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

por lo tanto:

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Omega} F'(z)$$

Sea ahora $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, por lo tanto z_0 no es un polo de f. Sea $\gamma(t)$ una curva paremetrizada, con $t \in [0,1]$, que une al punto z_0 con la variable z y que no pasa por ningún polo de la función f, es decir:

$$\gamma(0) = z_0$$

$$\gamma(1) = z$$

$$f(\gamma(t)) \neq \infty \ \forall\ t \in [0,1)$$

por lo tanto, como la serie en f es absolutamente convergente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma(t)} f(z)dz &= \int\limits_{\gamma(t)} \sum_{\omega\in\Omega} F'(z)dz \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \int\limits_{\gamma(t)} F'(z)dz \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} [F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} [F(z) - F(z_0)] = -\frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\omega)^2}\right]
\end{aligned}$$

En base a esta integral, con C una constante, definimos a la función $\varphi(z)$ como:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= C + \int\limits_{\gamma(t)} f(z)dz \\
&= C - \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\omega)^2}\right]
\end{aligned}$$

Dado que la serie en f converge uniformemente y f es una función meromorfa que tal que sus polos coinciden con el conjunto Ω, entonces por construcción es claro que la serie en φ converge uniformemente y que φ es una función meromorfa donde sus polos coinciden con el conjunto Ω.

Es claro que usando la notación de la página p.62, podemos escribir a φ como sigue:

$$\varphi(z) = C - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}\right] - \frac{1}{2}{\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\omega)^2}\right]. \tag{4.6}$$

Por lo que:

$$\lim_{z\to 0}\left(\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right) = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}{\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_0-\omega)^2}\right]. \tag{4.7}$$

Fijando la constante C como:

$$C = \frac{1}{2}{\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_0-\omega)^2}\right] - \frac{1}{2z_0^2}, \quad \text{obtenemos que} \quad \lim_{z\to 0}\left(\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right) = 0$$

y por lo tanto que:

$$\varphi(z) = \varphi(z) - \lim_{z\to 0}\left(\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right)$$

pero si a (4.6) le restamos (4.7) (que en realidad es 0) obtenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(z) - \lim_{z\to 0}\left(\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]\right) \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Definición 4.1. *(Weierstrass 1862/1863) Se define* ***la función $\wp$ de Weierstrass*** *como $\wp(z) = -2\varphi(z)$ donde $\varphi(z)$ es la función dada por (4.8), es decir:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

Teorema 4.3. *La serie en $\wp$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$ y además $\wp$ es una función meromorfa con todos sus polos de orden 2 que coinciden con los puntos del conjunto Ω. Además la parte principal de la expansión de Laurent alrededor de cada polo $z_j \in \Omega$ es:*

$$\frac{1}{(z-z_j)^2}$$

Demostración:
Dada la forma en que construimos a φ notamos que también la serie que define a $\wp$ converge uniformemente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Para comprobar que la convergencia de la serie en $\wp$ es también absoluta sumaremos únicamente sobre aquellos puntos $\omega \in \Omega$ de la forma $|\omega| > 2|z|$, ya que no sumar una cantidad finita de términos no afecta a la convergencia absoluta de una serie:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| &= \left|\frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\\ &= \left|\frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\\ &= \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\end{aligned}$$

Pero por la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$|z(2\omega - z)| \leq |z|(|2\omega| + |z|),$$

mientras que por la otra desigualdad del triángulo resulta que:

$$\left|\omega^2(z-\omega)^2\right| \geq |\omega|^2(|\omega| - |z|)^2$$

por lo tanto:

$$\left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \leq \frac{|z|(|2\omega| + |z|)}{|\omega|^2(|\omega| - |z|)^2} = \frac{|z||2\omega|(1 + \frac{|z|}{|2\omega|})}{|\omega|^4(1 - \frac{|z|}{|\omega|})^2} = \frac{2|z|(1 + \frac{|z|}{|2\omega|})}{|\omega|^3(1 - \frac{|z|}{|\omega|})^2}$$

y dado que $|\omega| > 2|z|$ entonces $\dfrac{|z|}{|\omega|} < \dfrac{1}{2}$, por lo que:

$$\frac{2|z|(1+\frac{|z|}{|2\omega|})}{|\omega|^3(1-\frac{|z|}{|\omega|})^2} < \frac{2|z|(1+\frac{1}{4})}{|\omega|^3(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

Obtuvimos entonces que:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| < \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

Pero por el lema 4.1 la serie

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ |\omega|>2|z|}} \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

es convergente, así que por comparación de series se sigue que la serie en $\wp$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Dada la forma en que construimos a φ notamos entonces que también $\wp$ es una función meromorfa y que sus polos coinciden con los puntos del conjunto Ω. Cada polo tiene orden 2 ya que:
i) Si $z_j \in \Omega\backslash\{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_j}(z-z_j)^k\wp(z) &= \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^k\left(\frac{1}{z^2} + {\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_j}\left(\frac{(z-z_j)^k}{z^2} + {\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{(z-z_j)^k}{(z-\omega)^2} - \frac{(z-z_j)^k}{\omega^2}\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_j}\frac{1}{(z-z_j)^{2-k}} + \lim_{z\to z_j}\left((z-z_j)^k r(z)\right) \\
&= \lim_{z\to z_j}\frac{1}{(z-z_j)^{2-k}}
\end{aligned}$$

pues $r(z_j) \neq \infty$, debido a que notamos que $r(z)$ está dada por:

$$r(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_j^2} - {\sum_{\omega\in\Omega\backslash\{z_j\}}}'\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

ii) Similarmente tenemos que si $z_j = 0$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} z^k \wp(z) &= \lim_{z\to 0} z^k \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right) \\
&= \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^k}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{z^k}{(z-\omega)^2} - \frac{z^k}{\omega^2} \right] \right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^{2-k}} + \lim_{z\to 0} \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{z^k}{(z-\omega)^2} - \frac{z^k}{\omega^2} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^{2-k}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall\ z_j \in \Omega$ y $\forall\ k \in \mathbb{N}$, de **i)** y **ii)** se sigue que:

$$\lim_{z\to z_j} (z - z_j)^k \wp(z) = \begin{cases} \infty & si \quad k = 1 \\ 1 & si \quad k = 2 \\ 0 & si \quad k > 2 \end{cases} \tag{4.9}$$

Entonces en efecto los puntos de Ω son polos de orden 2 para la función $\wp$. Además sabemos por el Teorema A.2 (Laurent) del Apéndice A, que la parte principal de $\wp$ para cada $z_j \in \Omega$ es:

$$\frac{b_2}{(z-z_j)^2} + \frac{b_1}{(z-z_j)}$$

donde $b_2 = \lim_{z\to z_j} (z - z_j)^2 \wp(z)$ y $b_1 = Res(\wp, z_j)$

Pero por (4.9) se tiene que $b_2 = 1\ \forall\ z_j \in \Omega$ y como sabemos que en cada $\Delta_{m,n}$ esta contenido un único punto de Ω entonces por el Teorema (3.6) (Segundo Teorema de Liouville) tenemos que el residuo en cada $z_j \in \Omega$ es igual a 0, es decir $b_1 = Res(\wp, z_j) = 0\ \forall\ z_j \in \Omega$. Lo que resulta en que la parte principal de $\wp$ para cada $z_j \in \Omega$ es:

$$\frac{1}{(z-z_j)^2}.$$

q.e.d

Observación 4.2. La estimación que usamos para probar la convergencia absoluta de la función $\wp$ (al inicio de la demostración anterior) puede parecer muy rebuscada, pero es necesario hacerlo de esta manera, pues para las series:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-\omega)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^2}$$

se tiene que la resta es convergente, pero tomadas por separado son divergentes. En el Apéndice C probamos para un caso particular de $2\omega_1$ y $2\omega_3$ dicha divergencia.

Teorema 4.4. *La función $\wp$ de Weierstrass es una función par y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y además $ord(\wp, \Delta) = 2$*

Demostración:
Como la serie de $\wp$ es absolutamente convergente se tiene que sin importar la manera en que sumemos los puntos del conjunto $\Omega \backslash \{0\}$, la serie convergerá al mismo valor, y además como $\Omega = -\Omega$ (Simetría), entonces:

$$\begin{aligned}
\wp(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-(-\omega))^2} - \frac{1}{(-\omega)^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega'\in-\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega')^2} - \frac{1}{\omega'^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega'\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega')^2} - \frac{1}{\omega'^2}\right] = \wp(z)
\end{aligned}$$

por lo tanto, en efecto, $\wp$ es una función par.
Notamos que:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-\omega)^3} = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

por lo tanto $\wp' = -f$, donde f es la función elíptica del Teorema 4.2, por ende $\wp'$ es una función impar y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ por lo que para $j = 1, 3$ tenemos que:

$$\wp'(z + 2\omega_j) = \wp'(z)$$

lo que implica que :

$$\wp'(z + 2\omega_j) - \wp'(z) = 0$$

por lo tanto existen constantes C_1 y C_3 tales que:

$$\wp(z + 2\omega_j) - \wp(z) = C_j$$

como $\wp$ es una función par resulta que si hacemos $z = -\omega_j$ entonces:

$$C_j = \wp(-\omega_j + 2\omega_j) - \wp(-\omega_j) = \wp(\omega_j) - \wp(\omega_j) = 0$$

así pues tenemos que:

$$\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$$
$$\wp(z + 2\omega_3) = \wp(z).$$

Por lo tanto $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son periodos de $\wp$. Para ver que en efecto son fundamentales tomamos a $\widetilde{\omega}$ cualquier periodo de $\wp$. Sea $\omega \in \Omega$ por lo que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ y además por el Teorema 4.3 sabemos que todo punto de Ω es un polo de $\wp$ y como $\omega + \widetilde{\omega}$ es también un polo de $\wp$ entonces existen $m', n' \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega + \widetilde{\omega} = 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega} &= (\omega + \widetilde{\omega}) - \omega \\ &= 2m'\omega_1 + 2n'\omega_3 - (2m\omega_1 + 2n\omega_3) \\ &= 2(m' - m)\omega_1 + 2(n' - n)\omega_3 \in \Omega\end{aligned}$$

entonces cualquier periodo arbitrario de $\wp$ se escribe como combinación lineal de $2\omega_1$ y $2\omega_3$, por ende estos son los periodos fundamentales. Como $\wp$ es una función meromorfa y doblemente periódica, concluimos que $\wp$ es una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.
Es claro que $\Delta \cap \Omega = \{0\}$ por lo tanto por Teorema 4.3 ,el el único polo de $\wp$ en Δ es el 0 y además este es de orden 2, por lo tanto:

$$ord(\wp, \Delta) = 2$$

q.e.d

Corolario. *(De los Teoremas 4.2 y 4.4) La función $\wp'$ es una función impar y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y además $ord(\wp', \Delta) = 3$.*

Los a-puntos de la Función $\wp'$

Por el Corolario (De los Teoremas 4.2 y 4.4) tenemos que $ord(\wp', \Delta) = 3$, por lo tanto en virtud del Teorema 3.7 (Tercer Teorema de Liouville), tenemos que $n(a) = 3 \ \forall \ a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Es decir que en Δ, $\forall \ a \in \widehat{\mathbb{C}}$ se tiene que la cantidad de a-puntos de $\wp'$, contados tantas veces como su orden, es igual a 3. En particular nos interesan los casos cuando $a = \infty$ y $a = 0$:

Caso i): $a = \infty$
En este caso sabemos que el único polo en Δ es el 0 y como $ord(\wp', \Delta) = 3$, entonces tenemos que 0 es un polo triple (es decir de orden 3) y en efecto se tiene que $n(\infty) = 3$.
Caso ii): $a = 0$
En este caso veremos que los ceros de $\wp'$ en Δ son simples (es decir de orden 1) y que son 3, por lo tanto tendremos que en efecto $n(0) = 1 + 1 + 1 = 3$. Los tres ceros son muy fáciles de encontrar ya que como $\wp'$ es una función impar tenemos que:

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

pero como $2\omega_j$ es un periodo de $\wp$ para $j = 1, 2, 3$ resulta que:

$$\wp'(2\omega_j - z) = -\wp'(z)$$

si hacemos $z = \omega_j$ entonces :

$$\wp'(\omega_j) = -\wp'(\omega_j). \tag{4.10}$$

Pero para $j = 1, 2, 3$ tenemos que $\omega_j \notin \Omega$, por lo tanto $\wp'(\omega_j) \neq \infty$, asi pues sumando $\wp'(\omega_j)$ a ambos lados de la ecuación (4.10) se deduce que:

$$\wp'(\omega_j) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Es claro que para $j = 1, 2, 3$ se cumple que $\omega_j \in \Delta$ entonces ω_1, ω_2 y ω_2 son los 3 ceros simples de $\wp'$ en Δ. Quedando entonces demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 4.5. *$\wp'(z) = 0$ si y sólo si $z \equiv \omega_j \pmod{\Omega}$, con $j = 1, 2, 3$.*

Ejemplo 4.1. Por el Teorema 3.8, para toda función elíptica, con $a \in \mathbb{C}$ se tiene que :

$$s(a) \equiv s(\infty) \pmod{\Omega}$$

Si tomamos a la función elíptica $\wp'$ y $a = 0$, tenemos que :

$$\begin{aligned} s(0) &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ &= \omega_1 + (\omega_1 + \omega_3) + \omega_3 \\ &= 2\omega_1 + 2\omega_3 \in \Omega \end{aligned}$$

mientras que $s(\infty) = 0 + 0 + 0 = 0$, y es claro que como $s(0) \in \Omega$ entonces:

$$2\omega_1 + 2\omega_3 \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

es decir que $s(0) \equiv s(\infty) \pmod{\Omega}$, ilustrando así el Teorema 3.8 para la función $\wp'$

Observación 4.3. La decisión tomada en el Capítulo 3 de denotar a los periodos de una función elíptica como $2\omega_1$ y $2\omega_3$ con $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$, es principalmente debida a la relevancia que tienen **los medios periodos $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_3}$ y $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_1 + \omega_3}$**, pues son los ceros de la función $\wp'$. En libros como [1] y [15] se denotan a los periodos de una función elíptica como ω_1 y ω_2, por lo tanto al hablar de los medios periodos hacen referencia a $\omega_1/2, \omega_2/2$ y a $(\omega_1 + \omega_2)/2$.

Los a-puntos de la Función $\wp$

Sabemos por el Teorema 4.4 que $ord(\wp, \Delta) = 2$, por lo que $n(a) = 2 \ \forall \ a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Es decir que en Δ, $\forall \ a \in \widehat{\mathbb{C}}$ se tiene que la cantidad de a-puntos de $\wp$, contados tantas veces como su orden, es igual a 2. En particular nos interesan tres casos:

Caso *i*): $a = \infty$
En este caso sabemos que el único polo en Δ es el 0 y como $ord(\wp, \Delta) = 2$, entonces tenemos que 0 es un polo doble (es decir de orden 2) y en efecto se tiene que $n(\infty) = 2$.
Caso *ii*): $a = \wp(\omega_j)$ para $j = 1, 2, 3$.
Como notación que se usara a partir de ahora, denotaremos a la **función $\wp$ evaluada en los medios periodos** como:

$$\wp(\omega_j) = e_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Entonces observamos que cada medio periodo ω_j es un e_j-punto doble de $\wp$ en Δ , ya que en referencia a las características dadas en la página 57 acerca del orden de los a-puntos, notamos que para $\wp$ se cumple que

$$\wp'(\omega_j) = 0,$$

es decir que para $j = 1, 2, 3$ el e_j-punto, ω_j, no puede ser simple, y como $n(e_j) = 2$ entonces forzosamente ω_j es un e_j-punto doble de $\wp$. Como una consecuencia adicional de lo anterior obtenemos que:

$$\wp''(\omega_j) \neq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Caso *iii*): $a \neq \infty, e_1, e_2, e_3$.
En este último caso tenemos que si $a \neq \infty, e_1, e_2, e_3$, entonces los a-puntos de $\wp$ en Δ son siempre simples ya que de existir $z_0 \in \Delta$ un a-punto doble entonces tendríamos que:

$$\wp(z_0) = a \quad \text{y que} \quad \wp'(z_0) = 0$$

y por ende z_0 sería un cero simple de $\wp'$ distinto a los medios periodos ω_j con $j = 1, 2, 3$, lo cual es imposible pues como $ord(\wp', \Delta) = 3$, $\wp'$ no puede tener más de 3 ceros simples. Por lo tanto, como $n(a) = 2$, en este caso tenemos que $\forall\ a \neq \infty, e_1, e_2, e_3$ existen 2 a-puntos distintos de $\wp$ en Δ y cada uno es de orden 1.

El siguiente resultado resume los tres casos anteriores y además nos da la ubicación en Δ de los dos a-puntos simples de $\wp$ del caso *iii)*.

Teorema 4.6. *La función $\wp$ toma el mismo valor en cualesquiera dos puntos pertenecientes a Δ^o que sean simétricos con respecto al centro de Δ, que es ω_2. De igual manera para $j = 1, 3$, $\wp$ toma el mismo valor en cualesquiera dos puntos pertenecientes a $[0 \to 2\omega_j)$ que sean simétricos con respecto a ω_j. En Δ, la función $\wp$ solamente no repite valores en los puntos que no son simétricos a los medios periodos, i.e. en $0, \omega_1, \omega_2$ y ω_3 que son respectivamente un polo doble y los e_j-puntos dobles de $\wp$. (Obs: dos puntos son simétricos con respecto a ω_j si el segmento de recta que los une tiene como punto medio a ω_j)*

Demostración:
Sabemos que si $a \neq \infty, e_1, e_2, e_3$ y $z_0 \in \Delta$ es un a-punto de $\wp$, entonces z_0 es de orden 1 y además existe otro a-punto simple en Δ.
Caso *i*): $z_0 \in \Delta^o$
Como el punto simétrico a z_0 con respecto a ω_2 es un punto u_0 tal que $(z_0 + u_0)/2 = \omega_2$, entonces $u_0 = 2\omega_2 - z_0$ y como $z_0 \in \Delta^o$ entonces también $u_0 \in \Delta^o$ y además sucede que:

$$\wp(u_0) = \wp(2\omega_2 - z_0) = \wp(-z_0) = \wp(z_0) = a$$

lo que implica que, en efecto, u_0 es el otro a-punto simple de $\wp$ en Δ. En la Figura 4.4 se ejemplifica esta situación para los puntos $p_1, p_2 \in \Delta^o$ donde los puntos simétricos con respecto a ω_2 son p'_1 y p'_2 respectivamente
Caso *ii*): $z_0 \notin \Delta^o$
Entonces $z_0 \in [0 \to 2\omega_j)$ para $j = 1$ ó para $j = 3$ y como el punto simétrico a z_0 con

respecto a ω_j es un punto u_0 tal que $(z_0 + u_0)/2 = \omega_j$, entonces $u_0 = 2\omega_j - z_0$ y dado que $z_0 \in [0 \to 2\omega_j)$ entonces también $u_0 \in [0 \to 2\omega_j)$ y además sucede que:

$$\wp(u_0) = \wp(2\omega_j - z_0) = \wp(-z_0) = \wp(z_0) = a$$

lo que implica que, en efecto, u_0 es el otro a-punto simple de $\wp$ en Δ. En la Figura 4.4 se ejemplifica esta situación para $j = 1$ con el punto $p_3 \in [0 \to 2\omega_1)$ donde p_3' es su punto simétrico con respecto a ω_1 y para $j = 3$ con el punto $p_4 \in [0 \to 2\omega_3)$ donde p_4' es su punto simétrico con respecto a ω_3 .

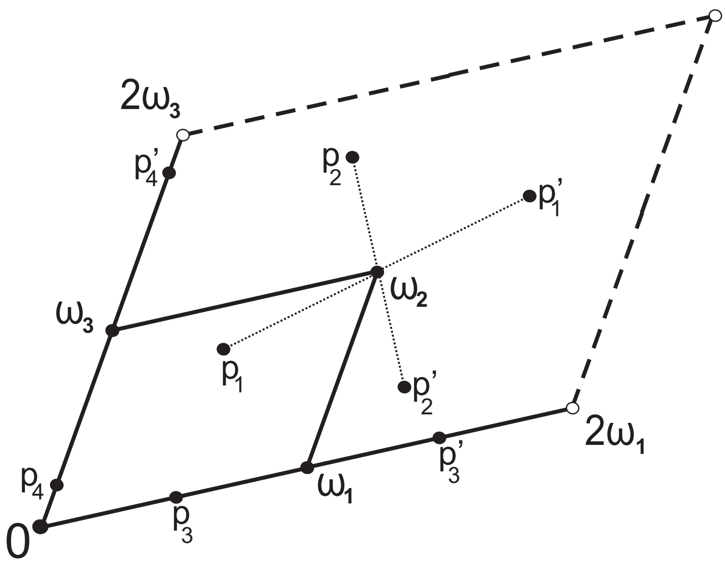


Figura 4.4: Valores de $\wp$ en Δ

Si ahora $a = \infty$ ya vimos que el único polo de $\wp$ en Δ es el 0 y como es de orden 2, entonces el valor $\wp(0)$ sólo se toma una vez.
Si $a = e_1, e_2, e_3$ entonces para cada j el único e_j-punto en Δ es ω_j y como vimos estos e_j-puntos son dobles, entonces el valor $\wp(w_j)$ sólo se toma una vez para cada $j = 1, 2, 3$.

q.e.d

Corolario. *(Del Teorema 4.6) Si restringimos el dominio de la función $\wp$ al paralelogramo con vértices en $0, \omega_1, \omega_2$ y ω_3, entonces $\wp$ es una función inyectiva y analítica en dicho paralelogramo excepto en el* 0.

4.3. Dos Casos Particulares de la Función $\wp$

Cualquier par de números complejos no colineales, que denotamos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ definen a la función elíptica $\wp$, que tendrá precisamente como periodos fundamentales a $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Por ello para definir por completo a la función $\wp$ es necesario especificar a los medios periodos ω_1 y ω_3, que claramente también son no colinelaes. Así para enfatizar la dependencia de la función $\wp$ de los medios periodos la denotamos como:

$$\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

donde el conjunto Ω es dependiente de los medios periodos, pues recordemos que:

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

entonces es claro que :

$$\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z-(2m\omega_1 + 2n\omega_3))^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} \right]$$

donde $\displaystyle\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'$, sigue denotando que no se toma en cuenta el caso $m = n = 0$.

El Caso $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Sean α y β dos números positivos arbitrarios, entonces es claro que α y $i\beta$ no son colineales. Tenemos que:

$$\frac{2\alpha}{2i\beta} = i\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \text{lo que implica que} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{2\alpha}{2i\beta}\right) = -\frac{\alpha}{\beta} < 0.$$

así que en términos de la Observación 3.1 del Capítulo 3, tenemos que $\omega_1 = \alpha$ y $\omega_3 = i\beta$, y por lo tanto se define una función $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$, es decir:

$$\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z-(2m\alpha + 2ni\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha + 2ni\beta)^2} \right]$$

Observación 4.4. Notamos que para el caso en que $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$, el paralelogramo fundamental Δ es un rectángulo con vértices en $0, 2\alpha, 2\alpha + 2i\beta$ y $2i\beta$.

Si $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ arbitrarios, entonces $\wp$ es una función elíptica que satisface dos propiedades que no satisface cualquier función elíptica, por lo que es un caso de particular interés. Dichas propiedades se enuncian y prueban a continuación en la forma de dos lemas:

Lema 4.2. *Sea* $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, *entonces:*

$$\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$$

Demostración:

Sea $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces si $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$, tenemos que :

$$\wp(z) = \wp(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x+iy-(2m\alpha+2ni\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right]$$

por lo tanto tomando el conjugado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{\wp(z)} &= \overline{\left(\frac{1}{(x+iy)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x+iy-(2m\alpha+2ni\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right]\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{1}{(x+iy)^2}\right)} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\overline{\left(\frac{1}{(x+iy-(2m\alpha+2ni\beta))^2}\right)} - \overline{\left(\frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\left(\overline{x+iy}\right)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{\left(\left(\overline{x+iy}\right) - \left(\overline{2m\alpha+2ni\beta}\right)\right)^2} - \frac{1}{\left(\overline{2m\alpha+2ni\beta}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{(x-iy)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x-iy-(2m\alpha-2ni\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha-2ni\beta)^2}\right] \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

mientras que por otro tenemos que:

$$\begin{aligned}
\wp(\overline{z}) &= \wp\left(\overline{x+iy}\right) \\
&= \wp(x-iy) \\
&= \frac{1}{(x-iy)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x-iy-(2m\alpha+2ni\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right] \\
&= \frac{1}{(x-iy)^2} + \sum_{m,n'=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x-iy-(2m\alpha-2n'i\beta))^2} - \frac{1}{(2m\alpha-2n'i\beta)^2}\right] \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

donde $n' = -n$ por lo que n' corre de ∞ a $-\infty$.

Sin embargo recordando la Proposición 3.1(Propiedades del conjunto Ω) del Capítulo 3 tenemos que:

$$\{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\alpha + 2ni\beta \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\} = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\alpha - 2ni\beta \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

así el cambio en el orden de los sumandos para obtener (4.11) está justificado por la convergencia absoluta de $\wp$ en $\mathbb{C}$. Notamos entonces que las igualdades (4.11) y (4.12) son las mismas, por lo que en efecto:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$$

q.e.d

Lema 4.3. *Sea* $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$*, si* $z \in \{iy,\ \alpha + iy,\ x,\ x + i\beta\}$*, con* $x, y \in \mathbb{R}$*, entonces:*

$$\wp(z) \in \mathbb{R}.$$

Demostración:
Sea $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$

Caso *i*): $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.2 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(iy)} = \wp\left(\overline{iy}\right) = \wp(-iy)$, pero como $\wp$ es una función par entonces $\wp(-iy) = \wp(iy)$, así para este caso tenemos que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(iy) = \wp(z), \text{ es decir que } \ \wp(z) \in \mathbb{R}$$

Caso *ii*): $z = \alpha + iy$ con $y \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.2 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(\alpha + iy)} = \wp\left(\overline{\alpha + iy}\right) = \wp(\alpha - iy)$, pero como 2α es un periodo de $\wp$ entonces $\wp(\alpha - iy) = \wp(\alpha - iy - 2\alpha) = \wp(-(\alpha + iy))$, y de nuevo por paridad se tiene que $\wp(-(\alpha + iy)) = \wp(\alpha + iy)$, por lo tanto para este caso tenemos que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(\alpha + iy) = \wp(z), \text{ es decir que } \ \wp(z) \in \mathbb{R}$$

Caso *iii*): $z = x$ con $x \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.2 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(x)} = \wp(\overline{x}) = \wp(x)$, entonces para este caso tenemos que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(x) = \wp(z), \text{ es decir que } \ \wp(z) \in \mathbb{R}$$

Caso *iv*): $z = x + i\beta$ con $x \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.2 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(x + i\beta)} = \wp\left(\overline{x + i\beta}\right) = \wp(x - i\beta)$, pero como $2i\beta$ es un periodo de $\wp$ entonces $\wp(x - i\beta) = \wp(x - i\beta + 2i\beta) = \wp(x + i\beta)$, luego en el último caso tenemos que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(x + i\beta) = \wp(z), \text{ es decir que } \ \wp(z) \in \mathbb{R}$$

q.e.d

A continuación mostraremos un Teorema acerca de la interpretación geométrica del mapeo de $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ en el dominio formado por el paralelogramo con vértices en sus medios periodos (que ya vimos que es un rectángulo). Antes de continuar nos detenemos para definir un concepto, que aunque no guarda gran relación con nuestro tema de estudio, es de gran importancia en el análisis complejo y en particular para el resultado que mostraremos posteriormente.

Definición 4.2. *Sea* G *un dominio,* $z_0 \in G$ *y* $f : G \to \mathbb{C}$ *una función continua en* G *con derivada en* z_0 *tal que* $f'(z_0) \neq 0$*. Decimos que* ***f* es un mapeo conforme en** $\boldsymbol{z_0}$ *si para toda curva suave* γ *que pasa por* z_0*, se tiene que* $f(\gamma)$ *es una curva que pasa por* $f(z_0)$ *y además el ángulo formado por cualesquiera dos curvas* γ_1 *y* γ_2 *en* z_0 *es el mismo que el formado por las curvas* $f(\gamma_1)$ *y* $f(\gamma_2)$ *en* $f(z_0)$*. Más aún:*

i) *Si el mapeo preserva la dirección en la que los ángulos se miden, entonces decimos que el mapeo es* ***conforme de primer tipo****.*

ii) *Si el mapeo invierte la dirección en la que los ángulos se miden, entonces decimos que el mapeo es* ***conforme de segundo tipo****.*

iii) *Si el mapeo es conforme* $\forall\ z_0\ \in G$ *entonces decimos que el mapeo es* ***conforme en G***

Tomando la definición anterior en cuenta, el siguiente Teorema enuncia un resultado sobre el mapeo dado por $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$:

Teorema 4.7. *Si* $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$*, y* R *es el rectángulo con vértices en los medios periodos de* $\wp$*, es decir en* $0, \alpha, i\beta$ *y* $\alpha + i\beta$*, entonces* $\wp$ *mapea conformemente a* R^o *sobre el semiplano inferior complejo.*

Demostración:
Por el Corolario (Del Teorema 4.6) sabemos que la función $\wp$ es inyectiva en R y analítica en $R\backslash\{0\}$, y además sabemos que los ceros de $\wp'$ en R únicamente son $\alpha, \alpha + i\beta$ y $i\beta$, y por lo tanto no tiene ceros en R^o, entonces gracias al Teorema B.8 (Mapeo Conforme), tenemos que $\wp$ es un mapeo conforme de primer tipo en R^o. Al ser R^o un dominio tenemos que en virtud del Teorema B.2 (Mapeo Abierto), también $D = \wp(R^o)$ es un dominio, y por lo tanto $\wp$ mapea conformemente a R^o sobre D.

Sea ahora $\gamma = \partial R^o$, entonces γ es una curva cerrada y por lo tanto $\wp(\gamma)$ es otra curva cerrada y además $\wp(\gamma) = \partial D$. Pero por el Lema 4.3 tenemos que:

$$\wp(z) \in \mathbb{R}\ \forall\ z \in \partial R^o$$

por lo tanto se tiene que $\wp(\gamma) = \partial D \subseteq \mathbb{R}$, pero al ser una curva cerrada sucede que $\partial D = \mathbb{R}$ y por lo tanto D tiene que ser alguno de los dos semiplanos.

Notamos que cuando $z \in [0 \to \alpha]$ se tiene que $z = x + i \cdot 0$ con $x \in [0, \alpha]$, y si z está cerca del 0 entonces:

$$\lim_{z\to 0} \wp(z) = \lim_{x\to 0} \wp(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) + 0 = \infty$$

mientras que cuando $z \in [i\beta \to 0]$ se tiene que $z = 0 + iy$ con $y \in [0, \beta]$, y si z está cerca del 0 entonces:

$$\lim_{z\to 0} \wp(z) = \lim_{y\to 0} \wp(iy) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{(iy)^2}\right) + 0 = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{-y^2}\right) = -\infty$$

por lo tanto si z recorre γ en sentido contrario a las manecillas del reloj con punto inicial y final 0, se tiene que $\wp(z)$ recorre $\wp(\gamma)$ desde ∞ hasta $-\infty$, y entonces $\wp(\gamma)$ está orientada de derecha a izquierda sobre la recta real, como se muestra en la Figura 4.5:

Para ver que en efecto D es el semiplano inferior, recordamos que $\wp$ es un mapeo conforme de primer tipo en R^o, y por lo tanto preserva la dirección en la que los ángulos se miden,

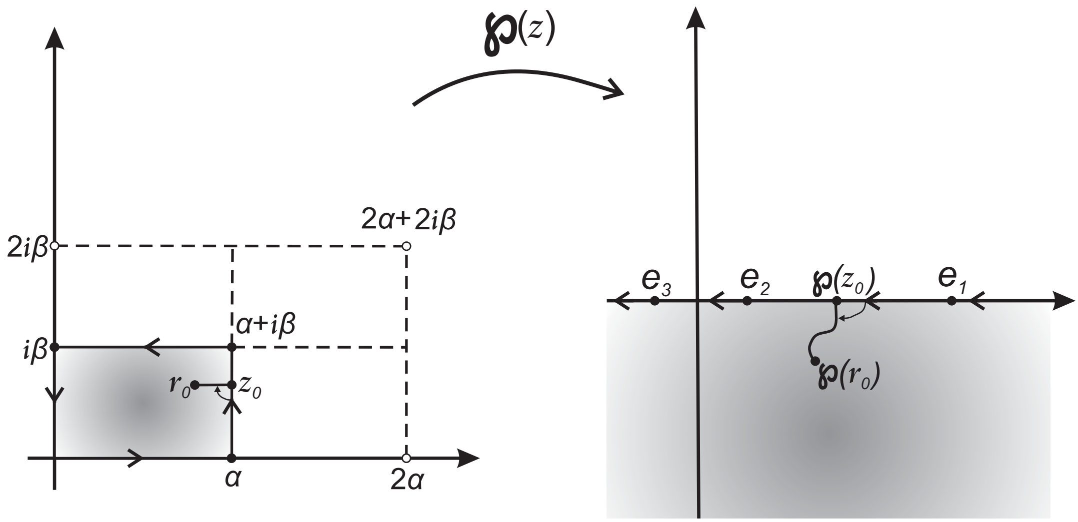


Figura 4.5: Mapeo de $\wp(z|\alpha, i\beta)$

así si r_0 es un punto perteneciente a R^o y z_0 es cualquier punto de ∂R distinto a los vértices de R por lo que $\wp'(z_0) \neq 0$, entonces tenemos que $[z_0 \to r_0] \in R$ y por lo tanto :

$$\wp([z_0 \to r_0]) \in \overline{D} \text{ y más aún } \quad \wp(z_0) \in \partial D$$

entonces cuando z recorre γ en sentido contrario a las manecillas del reloj, al encontrarse con el punto z_0 tendrá que girar a la izquierda para "entrar" al dominio R^o a través de la curva $[z_0 \to r_0]$, y por lo tanto si $\wp(z)$ recorre $\wp(\gamma)$ de ∞ a $-\infty$, al encontrarse con el punto $\wp(z_0)$, tendrá que girar a la izquierda a través de la curva $\wp([z_0 \to r_0])$ para "entrar" al dominio D, ya que la dirección con la que se mide el angulo que hacen γ con $[z_0 \to r_0]$ en z_0, es la misma que con la que se mide el angulo que hacen $\wp(\gamma)$ con $\wp([z_0 \to r_0])$ en $\wp(z_0)$ (ver Figura 4.5), entonces tenemos que $\wp([z_0 \to r_0])$ está en el semiplano inferior y por lo tanto D es el semiplano inferior.

q.e.d

Observación 4.5. Recordemos que si ω_j es un medio periodo entonces $\wp(\omega_j) = e_j$. Notamos que cuando z recorre γ en sentido contrario a las manecillas del reloj, partiendo desde el 0, encuentra los medios periodos: primero a α luego a $\alpha + i\beta$ y finalmente a $i\beta$. Por lo tanto cuando $\wp(z)$ recorre $\wp(\gamma)$ de ∞ a $-\infty$ encuentra primero a $\wp(\alpha) = e_1$ luego a $\wp(\alpha + i\beta) = e_2$ y finalmente a $\wp(i\beta) = e_3$, por eso es que $e_3 < e_2 < e_1$, como apreciamos en la Figura 4.5.

Ahora presentamos un resultado y enseguida las gráficas que lo ejemplifican:

Teorema 4.8. *Si $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, entonces:*

i) *Si $z \in (0 \to 2\alpha)$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_1 = [e_1, \infty)$*

ii) *Si $z \in [\alpha \to \alpha + 2i\beta]$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_2 = [e_2, e_1]$*

iii) *Si $z \in [i\beta \to 2\alpha + i\beta]$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_3 = [e_3, e_2]$*

iv) *Si $z \in (0 \to 2i\beta)$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_4 = (-\infty, e_3]$*

En los cuatro incisos, si z es un a-punto doble para alguna $a \in I_j$, con j respectivo a cada inciso, entonces también decimos que z toma dos veces el valor a.

Demostración:

i) Si $z \in (0 \to 2\alpha)$, por el Lema 4.3 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además por el Teorema 4.7 cuando z recorre el segmento $(0 \to \alpha]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $(\infty \to e_1]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $(0 \to \alpha]$ que en $[\alpha \to 2\alpha)$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_1 = \alpha$, por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $(\infty \to e_1]$ (ver Fig.4.6(a)).

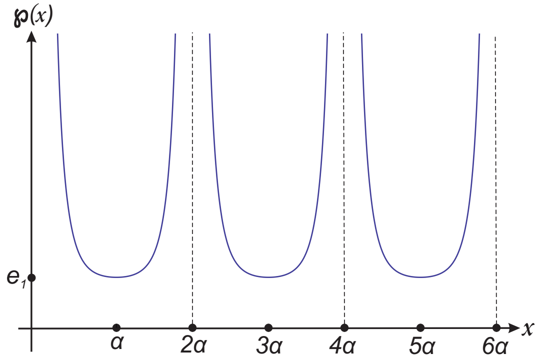
ii) Si $z \in [\alpha \to \alpha + 2i\beta]$, por el Lema 4.3 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además por el Teorema 4.7 cuando z recorre el segmento $[\alpha \to \alpha + i\beta]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $[e_1 \to e_2]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $[\alpha \to \alpha + i\beta]$ que en $[\alpha + i\beta \to \alpha + 2i\beta]$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_2 = \alpha + i\beta$ por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $[e_1 \to e_2]$ (ver Fig.4.6(b)).

iii) Si $z \in [i\beta \to 2\alpha + i\beta]$, por el Lema 4.3 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además por el Teorema 4.7 cuando z recorre el segmento $[i\beta \to \alpha + i\beta]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $[e_3 \to e_2]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $[i\beta \to \alpha + i\beta]$que en $[\alpha + i\beta \to 2\alpha + i\beta]$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_2 = \alpha + i\beta$ por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $[e_3 \to e_2]$ (ver Fig.4.6(c)).

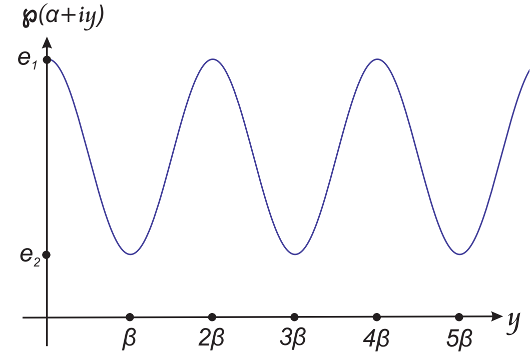
iv) Si $z \in (0 \to 2i\beta)$, por el Lema 4.3 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además por el Teorema 4.7 cuando z recorre el segmento $(0 \to i\beta]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $(-\infty \to e_3]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $(0 \to i\beta]$que en $[i\beta \to 2i\beta)$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_3 = i\beta$ por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $(-\infty \to e_3]$ (ver Fig.4.6(d)).

q.e.d

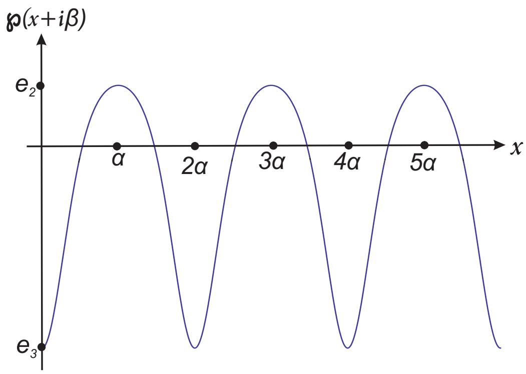
Las siguientes cuatro Figuras ilustran el resultado anterior y están en acorde con la Figura 4.5, es decir se toma en cuenta que $\wp(\alpha) = e_1, \wp(\alpha+i\beta) = e_2 > 0$ mientras que $\wp(i\beta) = e_3 < 0$. Pero el hecho de que e_1 y e_2 sean positivos y e_3 negativo no es forzoso si no que depende de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, los medios periodos elegidos. Observamos de inmediato que estas cuatro funciones representan funciones simplemente periódicas con periodos $2\alpha, 2\beta, 2\alpha$ y 2β respectivamente:



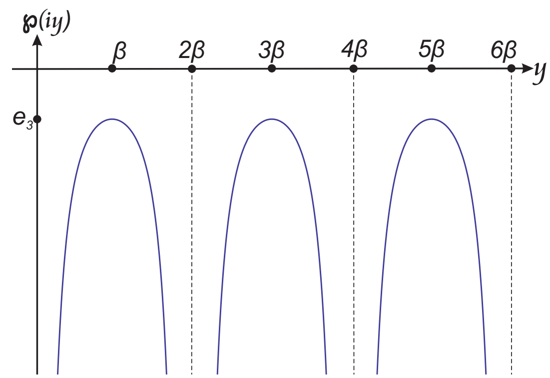
(a) $\wp(x)$



(b) $\wp(\alpha + iy)$



(c) $\wp(x + i\beta)$



(d) $\wp(iy)$

Figura 4.6: Valores reales de $\wp(z|\alpha, i\beta)$

Fig.4.6(a) Cuando $z \in (0 \to 2\alpha)$, $z = x + i \cdot 0$ con $x \in (0, 2\alpha)$ y $\wp(z) = \wp(x)$ tiende a ∞ en los extremos del segmento y comienza a repetir valores después de $\wp(\alpha) = e_1$, que es el valor mínimo que alcanza:

Fig.4.6(b) Cuando $z \in [\alpha \to \alpha + 2i\beta]$, $z = \alpha + iy$ con $y \in [0, 2i\beta]$ y $\wp(z) = \wp(\alpha + iy)$ va de $\wp(\alpha) = e_1$ hasta $\wp(\alpha + i\beta) = e_2$ y de ahí empieza repetir valores:

Fig.4.6(c) Cuando $z \in [i\beta \to 2\alpha + i\beta]$, $z = x + i\beta$ con $x \in [0, 2\alpha]$ y $\wp(z) = \wp(x + i\beta)$ va de $\wp(i\beta) = e_3$ hasta $\wp(\alpha + i\beta) = e_2$ y de ahí empieza repetir valores:

Fig.4.6(d) Cuando $z \in (0 \to 2i\beta)$, $z = 0 + iy$ con $y \in (0, 2\beta)$ y $\wp(z) = \wp(iy)$ tiende a $-\infty$ en los extremos del segmento y comienza a repetir valores después de e_3, que es el valor máximo que alcanza:

El Caso $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Ahora consideramos el caso donde los medios periodos son números complejos conjugados. Es claro que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ entonces $\alpha - i\beta$ y $\alpha + i\beta$ no son colineales por no ser reales y conjugados, además como :

$$\frac{2(\alpha - i\beta)}{2(\alpha + i\beta)} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + i\left(\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \quad \text{resulta que} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{2(\alpha - i\beta)}{2(\alpha + i\beta)}\right) = \frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} < 0.$$

siguiendo la Observación 3.1 del Capítulo 2, si fijamos a $\omega_1 = \alpha - i\beta$ y $\omega_3 = \alpha + i\beta$, obtenemos la función $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$, es decir $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ dada por:

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(z - (2m(\alpha - i\beta) + 2n(\alpha + i\beta)))^2} - \frac{1}{(2m(\alpha - i\beta) + 2n(\alpha + i\beta))^2}\right]$$

Observación 4.6. Si $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$, notamos que $\wp$ tambien tiene un periodo real (4α) y uno puramente imaginario $(4i\beta)$ ya que como $2\alpha - 2i\beta, 2\alpha + 2i\beta$ son periodos fundamentales de $\wp$ entonces:

$$\begin{aligned}
\wp(z + 4\alpha) &= \wp(z + (2\alpha - 2i\beta) + (2\alpha + 2i\beta)) \\
&= \wp(z + (2\alpha - 2i\beta)) \\
&= \wp(z) \\
\wp(z + 4i\beta) &= \wp(z + (2\alpha + 2i\beta) - (2\alpha - 2i\beta)) \\
&= \wp(z + (2\alpha + 2i\beta)) \\
&= \wp(z)
\end{aligned}$$

Sin embargo 4α y $4i\beta$ no son periodos fundamentales ya que el paralelogramo que forman contiene en el centro al periodo fundamental $2\alpha + 2i\beta$ (ver Figura 4.7).

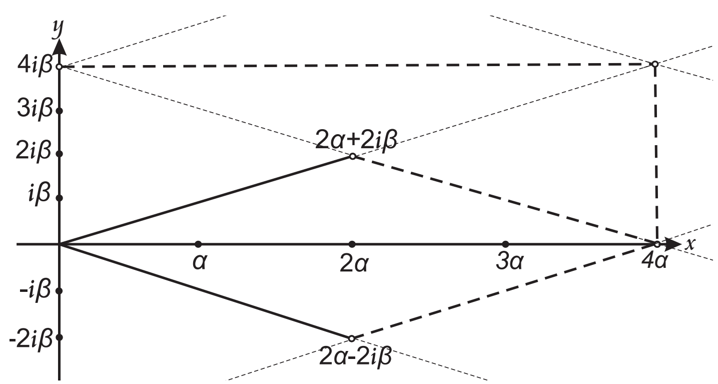


Figura 4.7: Paralelogramo fundamental cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$

Al igual que el resultado enunciado en el Lema 4.2, tenemos :

Lema 4.4. *Sea $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, entonces:*

$$\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$$

Demostración:
Sea $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ entonces si $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$, tenemos que $\wp(z)$ está dada por:

$$\frac{1}{(x+iy)^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{(x + iy - (2m(\alpha - i\beta) + 2n(\alpha + i\beta)))^2} - \frac{1}{(2m(\alpha - i\beta) + 2n(\alpha + i\beta))^2} \right]$$

Tomando por un lado a $\overline{\wp(z)}$, el conjugado de la expresión anterior y por otro lado a $\wp(\overline{z})$, la expresión anterior evaluada en $\overline{z}$, entonces de manera análoga a la demostración del Lema 4.2 se deduce que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$$

q.e.d

Para el caso en que $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ gracias al Lema 4.3 sabemos dónde la función $\wp$ toma valores reales. Un resultado similar se presenta a continuación para este caso:

Lema 4.5. *Sea $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, si $z \in \{2\alpha + iy, x\}$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$\wp(z) \in \mathbb{R}.$$

Demostración:
Sea $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$

Caso *i*): $z = 2\alpha + iy$ con $y \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.4 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(2\alpha + iy)} = \wp\left(\overline{2\alpha + iy}\right) = \wp(2\alpha + -iy)$, pero en la Observación 4.6 notamos que -4α es un periodo, entonces $\wp(2\alpha + -iy) = \wp(-2\alpha + -iy)$ y como $\wp$ es una función par entonces $\wp(-2\alpha + -iy) = \wp(2\alpha + iy)$ y por lo tanto

$$\overline{\wp(z)} = \wp(2\alpha + iy) = \wp(z), \text{ es decir que } \wp(z) \in \mathbb{R}$$

Caso *ii*): $z = x$ con $x \in \mathbb{R}$
Entonces por el Lema 4.4 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \overline{\wp(x)} = \wp(\overline{x}) = \wp(x)$, pues $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto para este caso tenemos que:

$$\overline{\wp(z)} = \wp(x) = \wp(z), \text{ es decir que } \wp(z) \in \mathbb{R}$$

q.e.d

Observación 4.7. Notamos que si $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ entonces $\wp$ también toma valores reales en todo el eje imaginario, ya que, como $2\alpha + 2i\beta$ es un periodo de $\wp$, entonces $\forall\ y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\wp(iy) = \wp(2\alpha + i(y + 2\beta)) \in \mathbb{R}$ por el Caso *i)* del lema anterior.

De manera análoga al Teorema 4.8 presentamos el resultado correspondiente para este caso y a continuación las gráficas que lo ejemplifican:

Teorema 4.9. *Si $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, entonces:*

i) *Si $z \in (0 \to 4\alpha)$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_1 = [e_2, \infty)$*

ii) *Si $z \in (2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha + 2i\beta)$, $\wp(z)$ toma dos veces cada valor del intervalo $I_2 = (-\infty, e_2]$*

En ambos incisos, si z es un a-punto doble para alguna $a \in I_j$, con j respectivo a cada inciso, entonces también decimos que z toma dos veces el valor a.

Demostración:

i) Si $z \in [0 \to 4\alpha)$, por el Lema 4.5 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además si $z \in [0 \to 2\alpha]$ y z tiende a 0 entonces tenemos que $z = x + i \cdot 0$ con $x \in [0, 2\alpha]$, así pues:

$$\lim_{z \to 0} \wp(z) = \lim_{x \to 0} \wp(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) + 0 = \infty$$

y si $z \in [0 \to 2\alpha]$ con z que tiende a 2α, como $\omega_2 = 2\alpha$ se tiene que:

$$\lim_{z \to 2\alpha} \wp(z) = \lim_{x \to 2\alpha} \wp(x) = \wp(2\alpha) = e_2.$$

Por lo tanto cuando z recorre el segmento $(0 \to 2\alpha]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $(\infty \to e_2]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $(0 \to 2\alpha]$ que en $[2\alpha \to 4\alpha)$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_2 = 2\alpha$, por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $(\infty \to e_2]$ (ver Fig.4.8(a)).

ii) Si $z \in (2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha + 2i\beta)$, por el Lema 4.5 $\wp(z) \in \mathbb{R}$, además si $z \in (2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha]$ y z tiende a $2\alpha - 2i\beta$ entonces tenemos que $z = 2\alpha + iy$ con $y \in [-2\beta, 0]$, así pues:

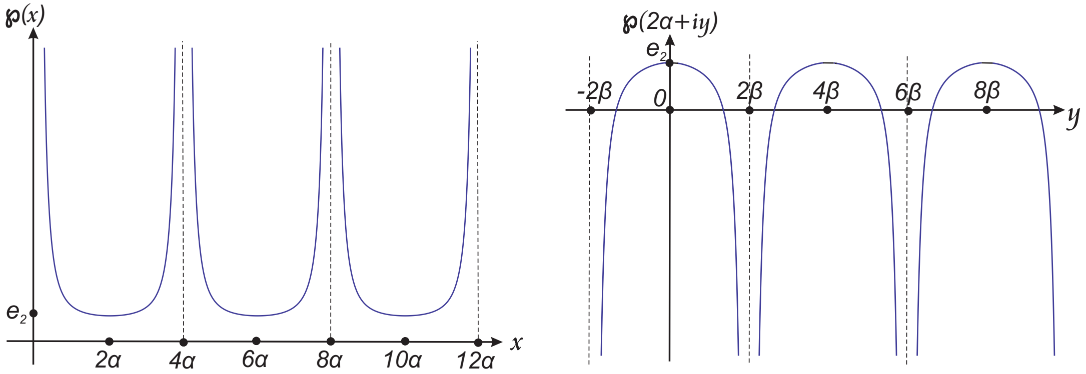
$$\lim_{z \to 2\alpha - 2i\beta} \wp(z) = \lim_{y \to -2\beta} \wp(2\alpha + iy) = \lim_{y \to -2\beta} \left(\frac{1}{(iy + 2i\beta)^2} \right) + 0 = \lim_{y \to -2\beta} -\frac{1}{(y + 2\beta)^2} = -\infty$$

y si $z \in [2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha]$ con z que tiende a 2α, entonces de nuevo se tiene que:

$$\lim_{z \to 2\alpha} \wp(z) = \lim_{y \to 0} \wp(2\alpha + iy) = \wp(2\alpha) = e_2.$$

Por lo tanto cuando z recorre el segmento $(2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha]$, $\wp(z)$ recorre el segmento $(-\infty \to e_2]$. Pero por el Teorema 4.6 se tiene que $\wp$ toma los mismos valores en $(2\alpha - 2i\beta \to 2\alpha]$ que en $[2\alpha \to 2\alpha + 2i\beta)$, por ser estos últimos los simétricos con respecto a $\omega_2 = 2\alpha$ por ende $\wp(z)$ toma 2 veces cada valor de $(-\infty \to e_2]$ (ver Fig.4.8(b)).

q.e.d



(a) $\wp(x)$ (b) $\wp(2\alpha + iy)$

Figura 4.8: Valores reales de $\wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$

Observación 4.8. Recordamos que para el primer caso $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$. Considerando el caso cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ resulta que únicamente $e_2 \in \mathbb{R}$. Sin embargo se tiene que $\overline{e_1} = e_3$, ya que:

$$e_1 = \wp(\omega_1) = \wp(\alpha - i\beta)$$

lo que implica que:

$$\overline{e_1} = \overline{\wp(\alpha - i\beta)}$$

pero por el Lema 4.4 tenemos que $\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})\ \forall\ z \in \mathbb{C}$, en particular si $z = \alpha - i\beta$:

$$\overline{e_1} = \wp\left(\overline{\alpha - i\beta}\right) = \wp(\alpha + i\beta) = \wp(\omega_3) = e_3$$

Capítulo 5

Relación con Integrales Elípticas

En los capítulos anteriores definimos a las funciones meromorfas doblemente periódicas como funciones elípticas. La motivación para llamarlas "elípticas" es porque estas guardan una importante relación con las integrales elípticas. Vimos que dichas integrales fueron introducidas en las matemáticas con la lemniscata. En este capítulo tratamos la relación entre la función elíptica de Weierstrass y las integrales elípticas así como sus consecuencias. Sin embargo para tratar estos temas es de gran importancia comenzar por deducir una ecuación diferencial que satisface la función $\wp$.

5.1. La Ecuación Diferencial para la función $\wp$

Sean $2\omega_1$ y $2\omega_3$ dos periodos fundamentales y Ω el conjunto de todas las combinaciones lineales enteras de éstos. Sea $\{g_w\}_{w\in\Omega\setminus\{0\}}$ la sucesión de funciones analíticas dadas por :

$$g_\omega(z) = \frac{1}{\omega^n} \ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Ahora para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ por el Lema 4.1 se tiene que:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' |g_\omega(z)| < \infty \ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

y por lo tanto por el Teorema B.7 (Prueba M de Weierstrass) del Apéndice B, tenemos que:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' g_\omega(z) = \sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^n}$$

es una serie que converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}$ para toda $n > 2$

Definición 5.1. *Definimos a* ***la serie de Eisenstein*** *asociada a Ω como:*

$$G_n = \sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^n} \ \forall\ n > 2$$

Teorema 5.1. *La serie de Laurent para la función* $\wp$ *en el anillo* $A_{0,R}(0)$ *(ver Figura 5.1) con* $0 < R < \min\{|\omega| : \omega \in \Omega \setminus \{0\}\}$ *(es decir que* $A_{0,R}(0) \cap \Omega = \emptyset$*), está dada por:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} \cdot z^{2n}$$

donde G_n*, la serie de Eisenstein, y la función* $\wp$ *se construyen con el conjunto* Ω*.*

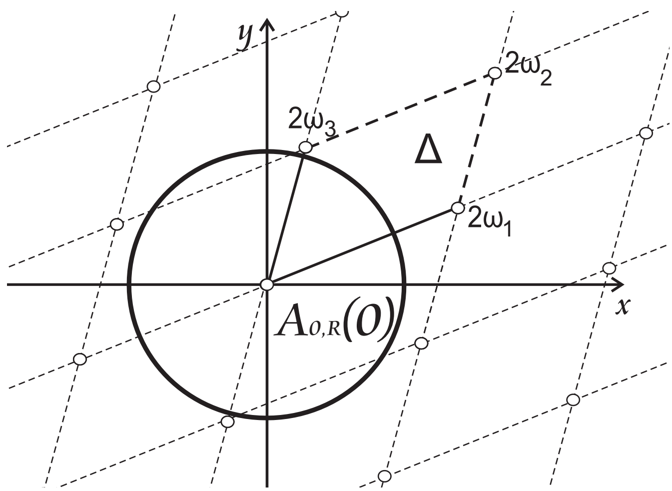


Figura 5.1: $A_{0,R}(0)$

Demostración:
Recordemos que para $|z| < 1$ tenemos que la serie de Taylor de la función $1/(1-z)$ es :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \tag{5.1}$$

derivando ambos lados de (5.1) obtenemos:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m z^{(m-1)}$$

ajustando el indice en la serie anterior obtenemos entonces que si $|z| < 1$ resulta que:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^m \tag{5.2}$$

Ahora como $z \in A_{0,R}(0)$ y además $A_{0,R}(0) \cap \Omega = \emptyset$ (es decir que ningún punto del conjunto Ω está contenido en el anillo), tenemos que $|z| < |\omega| \ \forall \ \omega \in \Omega \setminus \{0\}$, lo que implica que:

$$\left| \frac{z}{\omega} \right| < 1 \ \forall \ \omega \in \Omega \setminus \{0\}$$

así pues, gracias a (5.2) se tiene que si $z \in A_{0,R}(0)$ entonces:

$$\frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m \tag{5.3}$$

Pero por otro lado si $z \in A_{0,R}(0)$ también tenemos que:

$$\begin{aligned}\wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2} - 1\right)\right]\end{aligned}$$

Pero por lo obtenido en (5.3) tenemos entonces que:

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{\omega^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m - 1\right)\right]$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{z^m}{\omega^{m+2}} - \frac{1}{\omega^2}\right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\frac{z^m}{\omega^{m+2}} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty}(m+1)\left(\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^{m+2}}\right) z^m \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty}(m+1)G_{m+2}\cdot z^m \qquad (5.4)\end{aligned}$$

Sin embargo como $\wp$ es una función par, entonces $\wp(z) - \wp(-z) = 0$, aplicando esto a (5.4) al caso cuando m es impar (i.e. $m = 2n+1$), obtenemos que $G_{2n+3} = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y así los únicos coeficientes que sobreviven son cuando m es un número par ($m = 2n$), por lo que:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}\cdot z^{2n} \tag{5.5}$$

q.e.d

Derivando ambos lados de (5.5), obtenemos el siguiente resultado:

Corolario. *(Del Teorema 5.1) La serie de Laurent para la función $\wp'$ en el anillo $A_{0,R}(0)$ con $0 < R < \min\{|\omega| : \omega \in \Omega\setminus\{0\}\}$, está dada por:*

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n)(2n+1)G_{2n+2}\cdot z^{2n-1}$$

donde G_n, la serie de Eisenstein, y la función $\wp'$ se construyen con el conjunto Ω.

Teorema 5.2. *(La Ecuación Diferencial para la función $\wp$) La función $\wp$ satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden:*

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

*donde $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$ son los **invariantes** de la función $\wp$ asociada a Ω*

Demostración:
Del Teorema 5.1 y su Corolario tenemos que en $A_{0,R}(0)$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots \tag{5.6}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \cdots \tag{5.7}$$

y por lo tanto elevando (5.6) al cubo se obtiene que :

$$\begin{aligned} 4\wp^3(z) &= 4\left(\frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots\right)^3 \\ &= 4\left(\frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + h_1(z)\right) \\ &= \frac{4}{z^6} + 36G_4\frac{1}{z^2} + 60G_6 + 4h_1(z) \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde h_1 son los términos faltantes, todos los términos de h_1 están multiplicados por una potencia positiva de z, y por lo tanto $h_1(0) = 0$, es decir h_1 es una función analítica en $A_{0,R}(0)$ con un cero en $z = 0$.
De nuevo por (5.6) obtenemos que:

$$\begin{aligned} g_2\wp(z) &= g_2\left(\frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots\right) \\ &= 60G_4\left(\frac{1}{z^2} + h_2(z)\right) \\ &= 60G_4\frac{1}{z^2} + 60G_4h_2(z) \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde:

$$h_2(z) = 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots$$

es decir que h_2 son puros términos con potencias positivas de z en (5.6), y entonces h_2 es una función analítica en $A_{0,R}(0)$ con un cero en $z = 0$.
Mientras que si elevamos (5.7) al cuadrado resulta que:

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= \left(-\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \cdots\right)^2 \\ &= \frac{4}{z^6} - 24G_4\frac{1}{z^2} - 80G_6 + h_3(z) \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde h_3 son los términos faltantes, y de nuevo dichos términos tienen todos potencias positivas de z y entonces h_3 es una función analítica con un cero en $z = 0$.
Sea ahora $h(z) = (\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3$, entonces por (5.8),(5.9) y (5.10) se tiene que:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (\wp'(z))^2 & = & \dfrac{4}{z^6} - 24G_4\dfrac{1}{z^2} - 80G_6 + h_3(z) \\
- & 4\wp^3(z) & = & -\dfrac{4}{z^6} - 36G_4\dfrac{1}{z^2} - 60G_6 - 4h_1(z) \\
+ & g_2\wp(z) & = & 60G_4\dfrac{1}{z^2} + 60G_4h_2(z) \\
+ & g_3 & = & 140G_6 \\
\hline
 & h(z) & = & h_3(z) - 4h_1(z) + 60G_4h_2(z)
\end{array}
$$

Pero sabemos por el Teorema 3.4 que h es una función elíptica con los mismos periodos que $\wp$ y además como $h(z) = h_3(z) - 4h_1(z) + 60G_4h_2(z)$, entonces es una función entera alrededor del 0 y por ende, gracias al Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville), h es una función constante. Entonces resulta que la función h es la constante 0 ya que:

$$h(0) = h_3(0) - 4h_1(0) + 60G_4h_2(0) = 0 - 0 + 0 = 0.$$

Por lo tanto:

$$(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = 0$$

lo que implica que:

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

q.e.d

Observación 5.1. Notamos que gracias al teorema anterior, ahora es fácil calcular derivadas de $\wp$ de orden superior, ya que derivando la ecuación diferencial de ambos lados y luego dividiendo entre $2\wp'(z)$ obtenemos que :

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2$$

derivando la expresión anterior tenemos que:

$$\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z)$$

continuando de esta manera podemos obtener la derivada de cualquier orden de $\wp$, además es claro que si las expresamos recursivamente, dichas derivadas estarán siempre en términos de $\wp$ y $\wp'$.

5.2. Inversión de Integrales Elípticas

La relación que guardan las funciones elípticas con las integrales elípticas no está sólo en el nombre, si no que la función inversa de una integral elíptica es una función elíptica. Por ejemplo analizaremos el caso para la función elíptica $\wp$:
Por el Teorema 5.2 (La Ecuación Diferencial para la función $\wp$), tenemos que dado un conjunto de periodos Ω, si construimos una función $\wp$ con sus invariantes g_2 y g_3 se satisface que:

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

por lo tanto:

$$\wp'(z) = \sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}$$

tomando siempre en cuenta que el lado derecho de la ecuación anterior no es una función univaluada mientras que $\wp'(z)$ si lo es, por lo que hay que elegir con precaución el signo que corresponda al valor dado de $\wp'(z)$ según sea el caso. Dicho esto la ecuación anterior implica entonces que:

$$\frac{1}{\sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}}\wp'(z) = 1$$

Sea ahora $\gamma(t)$ con $t \in [0,1]$ una curva parametrizada que une a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ con la variable z sin pasar por ningún punto de Ω, entonces:

$$\int\limits_{\gamma(t)} \frac{1}{\sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}}\wp'(z)dz = \int\limits_{\gamma(t)} dz$$

y si ahora hacemos $u = \wp(z)$ tenemos que $du = \wp'(z)dz$ y por lo tanto:

$$\int\limits_{\wp(\gamma(t))} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = \int\limits_{\gamma(t)} dz$$

así tenemos que:

$$\int\limits_{\wp(\gamma(0))}^{\wp(\gamma(1))} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = \gamma(1) - \gamma(0)$$

lo que implica que:

$$z - z_0 = \int\limits_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

finalmente si $z_0 \to 0$ tenemos que $\wp(z_0) \to \infty$, por lo que:

$$z = \int\limits_{\infty}^{\wp(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

y por lo tanto la integral

$$I(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

cumple que $I(\wp(z)) = z$, así es claro que $I(y)$ es la inversa de $y = \wp(z)$ y como $I(y) = \wp^{-1}(y)$ es una integral elíptica de primera especie entonces podemos concluir que la inversa de dicha integral es la función elíptica $\wp$ de Weierstrass.

Observación 5.2. Recordemos que si $z = \omega_j$ entonces $\wp(z) = e_j$ para $j = 1, 2, 3$, por lo tanto obtenemos la siguiente expresión para los medios periodos:

$$\omega_j = \int_{\infty}^{e_j} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

Para poder continuar con la teoría de inversión de integrales elípticas, se requiere tratar ciertos temas y resultados conocidos del álgebra superior:
Recordemos que $\wp'(z) = 0$ si y sólo si $z \equiv \omega_j \pmod{\Omega}$ con $j = 1, 2, 3$. Como $\wp(z) = e_j$ si $z \equiv \omega_j \pmod{\Omega}$ con $j = 1, 2, 3$, entonces si hacemos $y = \wp(z)$ tenemos que:

$$(\wp'(z))^2 = \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

así pues se cumple que $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$ si y sólo si $y = e_j$ con $j = 1, 2, 3$, y por lo tanto tenemos que:

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3) \tag{5.11}$$

Definición 5.2. *Definimos el discriminante de un polinomio cúbico como:*

$$D = \prod_{j<k} (z_j - z_k)^2$$

donde z_1, z_2, z_3 son las tres raíces del polinomio.

Ejemplo 5.1. (Discriminante del polinomio de la ecuación diferencial) Nos interesa el polinomio $p(y) = 4y^3 - g_2 y - g_3$ que tiene sus tres raíces en e_1, e_2, e_3, para este caso después de cierta manipulación algebraica (ver [5]), D se puede reescribir como:

$$D = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$$

por lo tanto tenemos que:

$$D = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$$

y además sabemos que $e_j \neq e_k \ \forall\ j \neq k$, por lo tanto en este caso $D \neq 0$.

Ejemplo 5.2. (Relaciones entre coeficientes y raíces) Ahora si desarrollamos el lado derecho de (5.11) obtenemos que:

$$4y^3 - g_2y - g_3 = 4[y^3 - (e_1 + e_2 + e_3)^2 + (e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3)y - e_1e_2e_3]$$

de donde se siguen las siguientes 3 importantes relaciones entre coeficientes y raíces:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{5.12}$$

$$e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4} \tag{5.13}$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4} \tag{5.14}$$

Como consecuencia de los Teoremas B.9 y B.10 del Apéndice B, tenemos que los polinomios cúbicos con coeficientes reales tienen únicamente dos opciones:

i) Sus tres raíces son reales (es decir se descompone en tres polinomios con coeficientes reales de grado 1)

ii) Tiene una raíz real y dos complejas que son conjugados (es decir se descompone en un polinomio con coeficientes reales de grado 1 y otro con coeficientes reales de grado 2 y discriminante negativo)

Recordemos que para $p(u) = au^2 + bu + c$ si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ entonces las dos raíces de $p(u)$ son complejas mientras que si $b^2 - 4ac > 0$ ambas son reales y distintas. Si el polinomio es cúbico se tiene un resultado similar:

Teorema 5.3. *Si un polinomio cúbico con coeficientes reales tiene todas sus raíces reales y distintas entonces $D > 0$ mientras que cuando tiene una real y dos complejas se tiene que $D < 0$*

Demostración:
i) Sean z_1, z_2, z_3 las tres raíces reales y distintas del polinomio, entonces tenemos que:

$$D = \prod_{j<k}(z_j - z_k)^2 = (z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2 > 0$$

ii) Sea ahora z_1 la raíz real y z_2, z_3 las raíces complejas, por lo que $z_3 = \overline{z_2}$ por lo tanto si $z_2 = x + iy$ entonces $z_3 = x - iy$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} D = \prod_{j<k}(z_j - z_k)^2 &= (z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_2 - z_3)^2 \\ &= [(z_1 - x - iy)(z_1 - x + iy)]^2(2iy)^2 \\ &= \underbrace{[(z_1 - x)^2 + y^2]^2}_{>0}\underbrace{(2iy)^2}_{<0} < 0 \end{aligned}$$

q.e.d

Volviendo ahora al tema de inversión de integrales elípticas, nos surge una pregunta cuya respuesta va a basarse en el resultado anterior. Dicha cuestión se reduce a averiguar si dados dos números complejos $g_{,,}$ y $g_{,,,}$ que satisfacen que:

$$g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 \neq 0 \tag{5.15}$$

entonces existan dos complejos no colineales $2\omega_{,}, 2\omega_{,,,}$ con su conjunto de combinaciones lineales enteras $\widehat{\Omega}$ [1], tales que si $y = \wp(z|\omega_{,}, \omega_{,,,})$, entonces:

$$\frac{dy}{dz} = 4y^3 - g_{,,}y - g_{,,,}$$

en caso de existir $\omega_{,}, \omega_{,,,}$, $I_{,}(y)$ sería la inversa de $\wp(z|\omega_{,}, \omega_{,,,})$ donde:

$$I_{,}(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}}$$

y además $\omega_{,}, \omega_{,,,}$ deben de satisfacer que:

$$60G_4 = 60\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}}{}' \frac{1}{\omega^4} = g_{,,} \qquad 140G_6 = 140\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}}{}' \frac{1}{\omega^6} = g_{,,,}.$$

En otras palabras queremos saber si para todo par de complejos $g_{,,}$ y $g_{,,,}$, que satisfacen (5.15) existe un par de puntos de complejos $\omega_{,}, \omega_{,,,}$, tales que $g_{,,}$ y $g_{,,,}$ sean los invariantes de la función $\wp(z|\omega_{,}, \omega_{,,,})$.

Con los siguientes dos teoremas únicamente responderemos el caso en que $g_{,,}, g_{,,,} \in \mathbb{R}$, por ser este mucho más sencillo, además de ser el más utilizado en la práctica y en las aplicaciones.

Teorema 5.4. *Sean $g_{,,}, g_{,,,} \in \mathbb{R}$, tales que $g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 > 0$, entonces existen $\omega_{,}, \omega_{,,,} \in \mathbb{C}$, no colineales tales que la integral:*

$$I_{,}(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}}$$

es la inversa de la función $\wp(z|\omega_{,}, \omega_{,,,})$.

Demostración:
Como $g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 > 0$ entonces podemos ver que si D es el discriminante del polinomio cúbico:

$$p(u) = 4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,},$$

entonces $D > 0$, ya que de igual manera que en el Ejemplo 5.1 se ve que $16D = g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2$. Ahora por lo visto en el Teorema 5.3, si $D > 0$ entonces tenemos que el polinomio $p(u)$ tiene 3 raíces reales distintas, que denotamos como $e_{,}, e_{,,}, e_{,,,}$ tales que $e_{,} > e_{,,} > e_{,,,}$ y por lo tanto:

$$4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,} = 4(u - e_{,})(u - e_{,,})(u - e_{,,,}) \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

[1] Es claro que $\widehat{\Omega}\,\{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_{,} + 2n\omega_{,,,} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$

más aún si $u > e_,$ entonces (5.16) es mayor que cero, mientras que si $u < e_{,,,}$ entonces (5.16) es menor que cero. Si ahora definimos a $\omega_, = \alpha$ y $\omega_{,,,} = i\beta$ donde:

$$\alpha = \int_{e_,}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}} \qquad \beta = \int_{-\infty}^{e_{,,,}} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_{,,}u + g_{,,,}}} \tag{5.17}$$

entonces $\alpha, \beta > 0$, por lo que podemos formar la función $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ vista en el primer caso de la sección 4.3. Sean g_2, g_3 los invariantes de $\wp(z)$, por lo que para concluir que $I_,(y)$ es la inversa de la función $\wp(z)$, tenemos que probar que en efecto $g_{,,} = g_2$, y que $g_{,,,} = g_3$. Lo probaremos en 2 pasos:

Paso 1: $g_{,,}, g_{,,,}$ están únicamente determinados por α y β.

Para ver esto notamos que podemos escribir a α y a β como:

$$\alpha = \int_{e_,}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{(u-e_,)(u-e_{,,})(u-e_{,,,})}} \qquad \beta = \int_{-\infty}^{e_{,,,}} \frac{du}{2\sqrt{-(u-e_,)(u-e_{,,})(u-e_{,,,})}}$$

y con un cambio de variable algo engorroso (ver Apéndice D) obtenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{e_, - e_{,,,}}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{e_, - e_{,,,}}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1-k^2)t^2)}}$$

donde $k^2 = \dfrac{e_{,,} - e_{,,,}}{e_, - e_{,,,}}$, y como $e_, > e_{,,} > e_{,,,}$ entonces $0 < k^2 < 1$.
Tomando en cuenta el cociente de α y β tenemos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1-k^2)t^2)}}} \tag{5.18}$$

y por lo tanto si k^2 aumenta de 0 a 1 resulta que la integral en el numerador de (5.18) aumenta estrictamente de $\pi/2$ hasta ∞ ya que dicha integral es:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}, \text{ cuando } k = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \infty, \text{ cuando } k = 1$$

y también resulta que la integral en el denominador de (5.18) decrece estrictamente de ∞ a $\pi/2$ pues dicha integral es:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \infty, \text{ cuando } k=0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}, \text{ cuando } k=1$$

así por el Teorema B.11 (Fórmula de Leibniz) del Apéndice B, tenemos que (5.18) es el cociente de dos funciones diferenciables y distintas de cero para cada $k^2 \in [0,1]$, por lo tanto (5.18) es una función *continua* en k^2, por lo que cuando k^2 recorre el intervalo $(0,1)$ el cociente α/β recorre todos los valores del intervalo $(0,\infty)$, esto quiere decir que para cualquier valor dado de α/β existe un *único* valor de $k^2 \in (0,1)$. Por lo tanto si conocemos a α y β entonces conocemos unívocamente el valor de k^2 y con esto podemos calcular $\sqrt{e_, - e_{,,,}}$ pues:

$$\sqrt{e_, - e_{,,,}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{5.19}$$

y como $k^2 = \dfrac{e_{,,} - e_{,,,}}{e_, - e_{,,,}}$ entonces:

$$e_{,,} - e_{,,,} = (e_, - e_{,,,})k^2 \tag{5.20}$$

pero en sintonía con las ecuaciones (5.12),(5.13),(5.14) del Ejemplo 5.2 (Relaciones entre coeficientes y raíces), tenemos que:

$$e_, + e_{,,} + e_{,,,} = 0 \tag{5.21}$$

$$e_,e_{,,} + e_,e_{,,,} + e_{,,}e_{,,,} = -\frac{g_{,,}}{4} \tag{5.22}$$

$$e_,e_{,,}e_{,,,} = \frac{g_{,,,}}{4} \tag{5.23}$$

por lo tanto con las ecuaciones (5.19),(5.20),(5.21) obtenemos los valores de $e_,, e_{,,}, e_{,,,}$ y junto con (5.22) y (5.23) determinamos:

$$g_{,,} = -4(e_,e_{,,} + e_,e_{,,,} + e_{,,}e_{,,,})$$
$$g_{,,,} = 4(e_,e_{,,}e_{,,,})$$

así con α y β determinamos de manera única los valores $g_{,,}, g_{,,,}$, comprobando el *Paso 1.*

Paso 2: α y β satisfacen (5.17) *si $g_{,,}, g_{,,,}, e_,, e_{,,,}$ son remplazados por g_2, g_3, e_1, e_3.*

Para ver esto recordamos que si $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ entonces por el Lema 4.3 tenemos que $\wp(x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ y además teníamos que mientras x crece de 0 a α $\wp(x)$ decrece de ∞ a e_1 y $\wp'(x)$ crece de $-\infty$ a 0, por lo tanto:

$$\wp'(x) = -\sqrt{4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3}$$

y por lo tanto, como vimos al inicio de la sección, tendremos que:

$$z = -\int_{\infty}^{\wp(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

lo que implica que α en efecto satisface el *Paso 2*, ya que si $z = \alpha$ entonces:

$$\alpha = -\int_{\infty}^{e_1} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

de nuevo por el Lema 4.3 tenemos que $\wp(iy) \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}$ y además mientras y aumenta de 0 a β, $\wp(iy)$ crece de $-\infty$ a e_3 y $(\wp(iy))'$ decrece de ∞ a 0, por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\wp(iy))' = i\wp'(iy) &= i\sqrt{4\wp^3(iy) - g_2\wp(iy) - g_3} \\ &= i(-i)\sqrt{-4\wp^3(iy) + g_2\wp(iy) + g_3} \\ &= \sqrt{-4\wp^3(iy) + g_2\wp(iy) + g_3}\end{aligned}$$

lo que implica que β en efecto satisface el *Paso 2*, ya que recordando lo visto en el inicio de la sección:

$$\beta = \int_{\wp(0)}^{\wp(\beta)} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_2 u + g_3}} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_2 u + g_3}}.$$

Por lo tanto con el *Paso 1* y el *Paso 2* probamos que $g_{,,}$ y $g_{,,,}$ son los invariantes de $\wp(z|\alpha, i\beta)$ y por lo tanto que:

$$I_,(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,} u - g_{,,,}}} \quad \text{es en efecto la inversa de } \wp(z|\alpha, i\beta).$$

q.e.d

Teorema 5.5. *Sean $g_{,,}, g_{,,,} \in \mathbb{R}$, que satisfacen $g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 < 0$, entonces existen $\omega_,, \omega_{,,,} \in \mathbb{C}$, no colineales tales que la integral:*

$$I_,(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,} u - g_{,,,}}}$$

es la inversa de la función $\wp(z|\omega_,, \omega_{,,,})$.

Demostración:
Como $g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 < 0$, entonces el discriminante D, del polinomio cubico:

$$p(u) = 4u^3 - g_{,,} u - g_{,,,},$$

satisface que $D < 0$, ya que de igual manera que en el Ejemplo 5.1 se ve que $16D = g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2$. Ahora por lo visto en el Teorema 5.3, si $D < 0$ entonces el polinomio $p(u)$ tiene una raíz real, es decir $e_{,,} \in \mathbb{R}$ y dos raíces complejas conjugadas, es decir $e_{,}, e_{,,,} \in \mathbb{C}$ con $\overline{e_{,}} = e_{,,,}$, y por lo tanto:

$$4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,} = 4(u - e_{,})(u - e_{,,})(u - e_{,,,}) \in \mathbb{R} \tag{5.24}$$

más aún si $u > e_{,,}$ entonces (5.24) es mayor a cero, mientras que si $u < e_{,,}$ entonces (5.24) es menor a cero. Si ahora definimos a $\omega_{,} = \alpha - i\beta$ y $\omega_{,,,} = \alpha + i\beta$ donde:

$$2\alpha = \int_{e_{,,}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}} \qquad 2\beta = \int_{-\infty}^{e_{,,}} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_{,,}u + g_{,,,}}} \tag{5.25}$$

entonces $\alpha, \beta > 0$, por lo que podemos formar la función $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ vista en el segundo caso de la sección 4.3. Sean g_2, g_3 los invariantes de $\wp(z)$, entonces para concluir que $I_{,}(y)$ es la inversa de la función $\wp(z)$, tenemos que probar que en efecto $g_{,,} = g_2$, y que $g_{,,,} = g_3$. Al igual que el teorema anterior lo haremos en 2 pasos:

Paso 1: $g_{,,}, g_{,,,}$ están únicamente determinados por α y β.

Para ver esto notamos que podemos escribir a 2α y a 2β como:

$$2\alpha = \int_{e_{,,}}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{(u - e_{,})(u - e_{,,})(u - e_{,,,})}} \qquad 2\beta = \int_{-\infty}^{e_{,,}} \frac{du}{2\sqrt{-(u - e_{,})(u - e_{,,})(u - e_{,,,})}}$$

y después de un par de cambios de variable algo tediosos (ver Apéndice D) obtenemos que:

$$2\alpha = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos(\theta) + 1}} \qquad 2\beta = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos(\theta) + 1}}$$

donde $e_{,,} - e_{,} = re^{i\theta}$ con $r > 0$, lo que implica que $e_{,,} - e_{,,,} = re^{-i\theta}$, pues $\overline{e_{,}} = e_{,,,}$, y además sin pérdida de generalidad $\theta \in (0, \pi)$, pues si $\theta = arg(e_{,,} - e_{,}) \notin (0, \pi)$ entonces $arg(e_{,,} - e_{,,,}) \in (0, \pi)$ y simplemente renombramos $e_{,} \leftrightarrow e_{,,,}$.

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos(\theta) + 1}}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos(\theta) + 1}}} \tag{5.26}$$

por lo que si θ aumenta de 0 a π tenemos que la integral en el numerador de (5.26) crece estrictamente de $\pi/2$ hasta ∞ ya que esta integral impropia vale:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}, \text{ cuando } \theta = 0 \qquad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{|t^2-1|} = \infty, \text{ cuando } \theta = \pi$$

mientras que la integral impropia en el denominador de (5.26) decrece estrictamente de ∞ a $\pi/2$ pues dicha integral es:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{|t^2-1|} = \infty, \text{ cuando } \theta = 0 \qquad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\pi}{2}, \text{ cuando } \theta = \pi$$

y por lo tanto gracias al Teorema B.11 (Fórmula de Leibniz) de Apéndice B, tenemos que (5.26) es el cociente de dos funciones diferenciables y distintas de cero para toda $\theta \in (0,1)$, por lo tanto (5.26) es una función continua para toda $\theta \in (0,1)$, entonces mientras θ aumenta de 0 a π tenemos que el cociente α/β crece de 0 hasta ∞, lo que implica que para un valor dado de α/β existe un único valor de θ. Así al conocer α y β podemos determinar un único valor de θ y con esto el valor de r, ya que tenemos que:

$$\sqrt{r} = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos(\theta) + 1}}$$

y como además tenemos que:

$$re^{i\theta} = e_{,,} - e_{,} \tag{5.27}$$

$$re^{-i\theta} = e_{,,} - e_{,,,} \tag{5.28}$$

y al igual que en el teorema anterior obtenemos las relaciones entre raíces y coeficientes para el polinomio $p(u)$:

$$e_{,} + e_{,,} + e_{,,,} = 0 \tag{5.29}$$

$$e_{,}e_{,,} + e_{,}e_{,,,} + e_{,,}e_{,,,} = -\frac{g_{,,}}{4} \tag{5.30}$$

$$e_{,}e_{,,}e_{,,,} = \frac{g_{,,,}}{4} \tag{5.31}$$

por lo tanto con las identidades (5.27),(5.28),(5.29) obtenemos los valores de $e_{,}, e_{,,}, e_{,,,}$ y junto con (5.30) y (5.31) determinamos:

$$g_{,,} = -4(e_{,}e_{,,} + e_{,}e_{,,,} + e_{,,}e_{,,,})$$
$$g_{,,,} = 4(e_{,}e_{,,}e_{,,,})$$

así con α y β determinamos de manera única los valores $g_{,,}, g_{,,,}$, comprobando el *Paso 1.*

Paso 2: α y β satisfacen (5.25) *si $g_{,,}, g_{,,,}, e_{,,}$ son remplazados por g_2, g_3, e_2.*

Para ver esto recordamos que si $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ entonces por el Lema 4.5 tenemos que $\wp(x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ y además teníamos que mientras x crece de 0 a 2α $\wp(x)$, decrece de ∞ a e_2 y $\wp'(x)$ crece de $-\infty$ a 0, por lo tanto:

$$\wp'(x) = -\sqrt{4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3}$$

por lo que ya con el signo correcto tenemos que en efecto 2α satisface el *Paso 2* ya que:

$$2\alpha = -\int_{\wp(0)}^{\wp(2\alpha)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

mientras que igual en el Lema 4.5 vimos que $\wp(2\alpha + iy) \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}$ y que además mientras y aumenta de 0 a 2β $\wp(2\alpha + iy)$, decrece de e_2 a $-\infty$ y $(\wp(2\alpha + iy))'$ decrece de 0 a $-\infty$, por lo que:

$$\begin{aligned}(\wp(2\alpha + iy))' = i\wp'(2\alpha + iy) &= i\sqrt{4\wp^3(2\alpha + iy) - g_2\wp(2\alpha + iy) - g_3}\\ &= i(-i)\sqrt{-4\wp^3(2\alpha + iy) + g_2\wp(2\alpha + iy) + g_3}\\ &= \sqrt{-4\wp^3(2\alpha + iy) + g_2\wp(2\alpha + iy) + g_3}\end{aligned}$$

por lo que ya conocemos el signo correspondiente y entonces 2β satisface el *Paso 2* ya que:

$$2\beta = \int_{\wp(0)}^{\wp(2\beta)} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_2u + g_3}} = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + g_2u + g_3}}$$

Por lo tanto con el *Paso 1* y el *Paso 2* probamos que $g_{,,}$ y $g_{,,,}$ son en efecto los invariantes de $\wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ y por lo tanto que:

$$I_{,}(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}} \quad \text{es en efecto la inversa de } \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta).$$

q.e.d

Observación 5.3. Los dos Teoremas anteriores nos permiten notar que cuando los invariantes $g_2.g_3 \in \mathbb{R}$, estos determinan de manera única a los medios periodos de una función $\wp(z|\omega_1, \omega_3)$, de hecho es gracias a esta propiedad que reciben el nombre de invariantes. Por lo tanto, en términos de notación, podemos enfatizar la dependencia de $\wp$ en dos medios periodos no colineales, como hemos hecho hasta ahora con $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$, o bien enfatizar la dependencia en dos invariantes $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ que cumplan que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, al poner $\wp(z) = \wp(z|g_2, g_3)$.

Capítulo 6

Funciones Elípticas Arbitrarias

En este capítulo conoceremos diferentes maneras en las que se pueden expresar las funciones elípticas, incluso si no sabemos su forma funcional explícita y únicamente conocemos sus polos y ceros. La función $\wp$ juega un papel básico para la expresión de cualquier función elíptica y además veremos otras dos funciones, obtenidas directamente de $\wp$, que aunque no son elípticas, son clave para ciertas expresiones de funciones elípticas arbitrarias.

6.1. Funciones Elípticas en términos de $\wp$ y $\wp'$

En esta sección mostraremos como cualquier función elíptica dada se puede expresar en términos de las funciones $\wp$ y $\wp'$, mostrando así porqué estas funciones son de gran importancia para el tratamiento de las funciones elípticas. El siguiente resultado es la base de esta sección:

Lema 6.1. *Sea f cualquier función elíptica par y no constante, con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, si $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$, entonces existe $R(u)$ una función racional de una variable tal que f se puede expresar como:*

$$f(z) = R\big(\wp(z)\big)$$

Demostración:
Cualquier función elíptica par no constante satisface uno de los siguientes tres casos, por lo que probaremos el lema para cada uno de ellos:
Caso *i*): El origen no es un polo ni un cero de f. En este caso notamos que si $a \in \Delta$ es un cero de la función f, entonces se tiene que $f(a) = 0$ pero al ser f una función par tenemos que

$$f(-a) = f(a) = 0$$

y por lo tanto $-a$ también es un cero de f. Sin embargo no podemos asegurar que $-a \in \Delta$, pero recordando la Observación 3.3 sabemos que existe $z_a \in \Delta$ tal que:

$$-a \equiv z_a \pmod{\Omega}$$

y entonces $f(z_a) = f(a) = 0$, es decir a y z_a son dos ceros de f en Δ. De igual manera tenemos que si $b \in \Delta$ es un polo de la función f entonces $-b$ también es un polo de f y de nuevo sabemos que existe $z_b \in \Delta$ tal que:

$$-b \equiv z_b \pmod{\Omega}$$

y por ende b y z_b son dos polos de f en Δ. Es decir por ser f una función par resulta que los ceros y los polos de f en Δ aparecen por pares, por lo que podemos separar en dos listas a todos los ceros de f en Δ, que son $\{a_1, \cdots, a_n\}$ y $\{z_{a_1}, \cdots, z_{a_n}\}$ (en ambas listas repitiendo cada cero tantas veces como su orden), de igual forma separamos en dos listas a los polos de f en Δ, dadas por $\{b_1, \cdots, b_n\}$ y $\{z_{b_1}, \cdots, z_{b_n}\}$ (en ambas listas repitiendo cada polo tantas veces como su orden). Definimos ahora a la función φ como:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_k)}{\wp(z) - \wp(b_k)}.$$

Notamos en primera instancia que φ es una función elíptica, luego aprovechando la paridad de $\wp$ notamos que los ceros de φ son $\{\pm a_1, \cdots, \pm a_n\}$ y que los polos de φ son $\{\pm b_1, \cdots, \pm b_n\}$, por lo que podemos asegurar que φ es una función elíptica que tiene los mismos ceros y polos que la función f en Δ, lo que implica la función:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

no tiene polos en Δ y al ser elíptica se sigue que no tiene polos en todo $\mathbb{C}$, es decir que es entera, así que f/φ es una función constante por el Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville). Por lo tanto $f(z) = C\varphi(z)$ donde C es una constante, de donde se sigue que:

$$f(z) = C \prod_{k=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_k)}{\wp(z) - \wp(b_k)}$$

pero como $C\varphi$ es claramente una función racional en $\wp$, concluimos que $f(z) = R\big(\wp(z)\big)$ como queríamos.

Caso *ii*): El origen es un polo de f. En este caso como f es una función par es claro que el orden de los polos es par (pues en la serie de Laurent los coeficientes impares valen 0), es decir que para alguna $m \in \mathbb{N}$ el origen es un polo de orden $2m$ de la función f. Consideremos ahora a la función g dada por:

$$g(z) = \frac{f(z)}{\wp^m(z)}$$

es claro que g es una función elíptica par y además como $\wp$ tiene un polo doble en el origen, entonces $\wp^m$ tiene un polo de orden $2m$ en el origen, entonces analizando la serie de Laurent en el origen para f y $\wp^m$, se sigue que el origen no es un polo ni un cero del cociente $f/\wp^m$, es decir que el origen no es un polo ni un cero de g. Por lo tanto tenemos que g cumple las condiciones del **Caso *i*)**, es decir que existe una función racional $R(u)$ tal que $g(z) = R\big(\wp(z)\big)$, lo que implica que:

$$f(z) = R\big(\wp(z)\big)\wp^m(z)$$

tomando la función racional $\widetilde{R}(u) = R(u)u^m$ se sigue entonces que $f(z) = \widetilde{R}\big(\wp(z)\big)$ como buscábamos.
Caso *iii*): El origen es un cero de f. De nuevo como f es par se sigue que para alguna $m \in \mathbb{N}$ el origen es un cero de orden $2m$ de la función f. Proponemos la función g dada por:

$$g(z) = f(z)\wp^m(z)$$

por lo que g es una función elíptica par, pero al tener $\wp^m$ tiene un polo de orden $2m$ en el origen, si multiplicamos la serie de Laurent en el origen para f (que tiene un cero de orden $2m$ en el origen) con la de $\wp^m$, se sigue que el origen no es un polo ni un cero de $f \cdot \wp^m$, es decir que el origen no es un polo ni un cero de g. Por lo tanto la función g satisface las condiciones del **Caso *i*)**, es decir que existe una función racional $R(u)$ tal que $g(z) = R\big(\wp(z)\big)$, lo que implica que:

$$f(z) = \frac{R\big(\wp(z)\big)}{\wp^m(z)}$$

por lo que si consideramos la función racional $\widetilde{R}(u) = R(u)/u^m$ se sigue que $f(z) = \widetilde{R}\big(\wp(z)\big)$.
Los tres casos anteriores prueban que cualquier función elíptica par no constante se escribe como una función racional en $\wp$ como queríamos. **q.e.d**

El lema anterior implica de manera casi inmediata el resultado principal de la sección, que asegura la expresión de cualquier función elíptica en términos de $\wp$ y $\wp'$

Teorema 6.1. *Sea f cualquier función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, si $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$ entonces existen $R_1(u)$, $R_2(u)$ funciones racionales de una variable tal que:*

$$f(z) = R_1\big(\wp(z)\big) + R_2\big(\wp(z)\big)\wp'(z)$$

Demostración:
Si f es una función constante que toma siempre el valor C entonces el resultado es obvio pues ponemos $R_1(u) = C$ y $R_2(u) = 0$. Supongamos entonces que f es una función elíptica no constante, podemos escribir a f como:

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \left(\frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)}\right)\wp'(z)$$

y además es claro que:

$$f_1(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}$$

siempre es una función elíptica par, por lo tanto por el Lema 6.1 sabemos que existe una función racional $R_1(u)$ tal que:

$$f_1(z) = R_1\big(\wp(z)\big).$$

Como $\wp'(z)$ es una función elíptica impar, se sigue que:

$$f_2(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)}$$

siempre es una función elíptica par, por lo que por el Lema 6.1 sabemos que existe una función racional $R_2(u)$ tal que:

$$f_2(z) = R_2\big(\wp(z)\big).$$

Como $f(z) = f_1(z) + f_2(z)\wp'(z)$ entonces tenemos que cualquier función elíptica f se escribe como:

$$f(z) = R_1\big(\wp(z)\big) + R_2\big(\wp(z)\big)\wp'(z)$$

es decir en términos de $\wp$ y $\wp'$ como se quería. **q.e.d**

Funciones ζ y σ de Weierstrass

En la sección 6.1 vimos que podemos expresar cualquier función elíptica (conociendo sus polos y sus ceros en Δ) con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ en términos de $\wp$ y de $\wp'$. En las siguientes secciones presentamos las funciones ζ y σ de Weierstrass, que a pesar de no ser funciones elípticas guardan una profunda relación con la función $\wp$ y además veremos que juegan un papel de suma importancia para expresar funciones elípticas arbitrarias.

Recordemos que el Teorema 4.3 nos dice que $\wp$ tiene un polo doble en ω, $\forall\ \omega \in \Omega$ con parte principal :

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}\ \forall\ \omega \in \Omega$$

lo cual nos recuerda a una función simplemente periódica en particular, que es la función trigonométrica *cosecante* cuadrada, ya que esta tiene un polo doble en $m\pi$, $\forall\ m \in \mathbb{Z}$, y como además tenemos que:

$$\lim_{z\to m\pi} (z-m\pi)^2 \csc^2(z) = \lim_{z\to m\pi} \left(\frac{(z-m\pi)}{\operatorname{sen}(z)}\right)^2 = 1\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$

por lo que resulta que la parte principal de la función *cosecante* cuadrada en cada polo $m\pi$ es:

$$\frac{1}{(z-m\pi)^2}\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$$

notando así una clara similitud entre con la función $\wp$. Además recordemos que la función *cosecante* cuadrada se relaciona con la función *cotangente* gracias a la derivada:

$$\frac{d}{dz}\cot(z) = -\csc^2(z)$$

mientras que la función *cotangente* a su vez se relaciona con la función *seno* por la derivada logarítmica:

$$\frac{d}{dz}\ln(\operatorname{sen}(z)) = \cot(z).$$

Por lo tanto así como vimos las similitudes de la función *cosecante* cuadrada con $\wp$ tendremos que la función ζ se asemejará a la *cotangente* pues veremos que $(\zeta(z))' = -\wp(z)$, mientras que la función σ jugará el rol del *seno* pues veremos que $(\ln[\sigma(z)])' = \zeta(z)$.

6.2. Función ζ de Weierstrass

Definición 6.1. *Se define a **la función ζ de Weierstrass** como:*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Lema 6.2. *La función ζ de Weierstrass satisface que:*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right) du$$

donde $\int_0^z$ denota la integral sobre una curva γ, que une al 0 con z sin pasar por puntos de Ω

Demostración:
Recordemos que:

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

pero por el Teorema 4.3, la serie anterior converge uniformemente y por lo tanto al integrarla sobre γ podemos integrar término a término, es decir:

$$\begin{aligned}\int_0^z \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right) du &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \int_0^z \left[\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] du \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\int_0^z \frac{du}{(u-\omega)^2} - \int_0^z \frac{du}{\omega^2}\right] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{-1}{(u-\omega)^2}\Big|_0^z - \frac{u}{\omega^2}\Big|_0^z\right] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[-\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{z}{\omega^2}\right] = \frac{1}{z} - \zeta(z)\end{aligned}$$

q.e.d

Observación 6.1. Del lema anterior notamos que la serie en la expresión de la función ζ se obtiene de integrar una serie que converge uniformemente, así por el Teorema B.12 (Integral de una Serie) del Apéndice B, concluimos que es una serie que converge uniformemente.

Proposición 6.1. *La función ζ de Weierstrass satisface que:*

i) $\dfrac{d}{dz}\zeta(z) = -\wp(z)$

ii) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \dfrac{1}{z}\right) = 0$

Demostración:
Para *i)*, sabemos por la Observación 6.1 que la serie en la función ζ converge uniformemente, entonces podemos derivarla término a término, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\zeta(z) &= -\frac{1}{z^2} + {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[-\frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right] \\ &= -\left(\frac{1}{z^2} + {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]\right) = -\wp(z)\end{aligned}$$

Para ver *ii)*, notamos que:

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

y de nuevo al ser la anterior una serie que converge uniformemente, el límite de la serie es la serie de los limites, lo que implica que:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) &= \lim_{z\to 0}\left({\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]\right) \\ &= {\sum_{\omega\in\Omega}}' \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right] \\ &= {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

q.e.d

Observación 6.2. Notamos que la función ζ tiene un polo simple en $z_j\ \forall\ z_j \in \Omega$ ya que si $z_j = 0$ entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} z\zeta(z) &= \lim_{z\to 0}\left(1 + {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{z}{z-\omega} + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{\omega^2}\right]\right) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \neq 0, \infty\end{aligned}$$

mientras que si $z_j \neq 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_j}(z-z_j)\zeta(z) &= \lim_{z\to z_j}\left(\frac{z-z_j}{z} + {\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{z-z_j}{z-\omega} + \frac{z-z_j}{\omega} + \frac{z(z-z_j)}{\omega^2}\right]\right) \\
&= 0 + \lim_{z\to z_j}\left({\sum_{\omega\in\Omega}}' \left[\frac{z-z_j}{z-\omega} + \frac{z-z_j}{\omega} + \frac{z(z-z_j)}{\omega^2}\right]\right) \\
&= \lim_{z\to z_j}\left({\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq z_j}}}' \left[\frac{z-z_j}{z-\omega} + \frac{z-z_j}{\omega} + \frac{z(z-z_j)}{\omega^2}\right]\right) + \lim_{z\to z_j}\left[1 + \frac{z^2-z_j^2}{z_j^2}\right] \\
&= 0 + 1 \\
&= 1 \neq 0, \infty
\end{aligned}$$

y por lo tanto la parte principal de ζ alrededor de cada $z_j \in \Omega$ es :

$$\frac{1}{z-z_j}.$$

Teorema 6.2. *La función ζ de Weierstrass es una función impar, es decir:*

$$\zeta(-z) = -\zeta(z) \ \forall \ z \in \mathbb{C}$$

Demostración:
Basta probar que $\zeta(-z) + \zeta(z) = 0 \ \forall \ z \in \mathbb{C}$, por lo tanto como en la Proposición 6.1 vimos que $\frac{d}{dz}\zeta(z) = -\wp(z)$ y como $\wp$ es una función par se tiene que:

$$\frac{d}{dz}\left(\zeta(-z) + \zeta(z)\right) = -\frac{dz}{z}\zeta(-z) + \frac{d}{dz}\zeta(z) = \wp(-z) - \wp(z) = 0$$

entonces $\zeta(-z) + \zeta(z) = C$ donde C es una constante. Para determinar C notamos que:

$$C = \zeta(-z) + \frac{1}{z} + \zeta(z) - \frac{1}{z}$$

y recordando que por la Proposición 6.1 $\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0$, entonces:

$$C = \lim_{z\to 0}\left(\zeta(-z) + \frac{1}{z}\right) + \lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0 + 0 = 0$$

y por ende $\zeta(-z) + \zeta(z) = 0$

q.e.d

Teorema 6.3. *La función ζ de Weierstrass satisface:*

$\zeta(z+2\omega_j)=\zeta(z)+2\eta_j$ *para* $j=1,2,3$ *(Decimos que ζ es una función* ***cuasi-periódica****)*

donde las η_j satisfacen ***las tres relaciones de Legendre****:*

$$
\begin{aligned}
2\omega_3\eta_1-2\omega_1\eta_3&=\pi i \quad \textit{(Primera relación de Legendre)}\\
2\omega_1\eta_2-2\omega_2\eta_1&=-\pi i \quad \textit{(Segunda relación de Legendre)}\\
2\omega_2\eta_3-2\omega_3\eta_2&=-\pi i \quad \textit{(Tercera relación de Legendre)}
\end{aligned}
$$

Demostración:
Tenemos que:

$$\frac{d}{dz}\left(\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)\right)=-\wp(z+2\omega_j)+\wp(z)=0 \text{ para } j=1,2,3$$

Por lo tanto para cada $j\in\{1,2,3\}$ existe una constante, que llamamos $2\eta_j$, tales que:

$$\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)=2\eta_j \text{ para } j=1,2,3 \tag{6.1}$$

Ahora para comprobar que dichas constantes satisfacen las relaciones de Legendre, notamos que si Δ' es el paralelogramo con vértices $-\omega_2,\omega_1-\omega_3,\omega_2$ y $\omega_3-\omega_1$ (ver Figura 6.1), resulta que $\gamma=\partial\Delta'$ (orintada en sentido contrario a las manecillas del reloj) no contiene a ningún polo de ζ y que, al igual que en el paralelogramo fundamental Δ, el único polo de ζ en $int(\gamma)$ es cuando $z=0$.

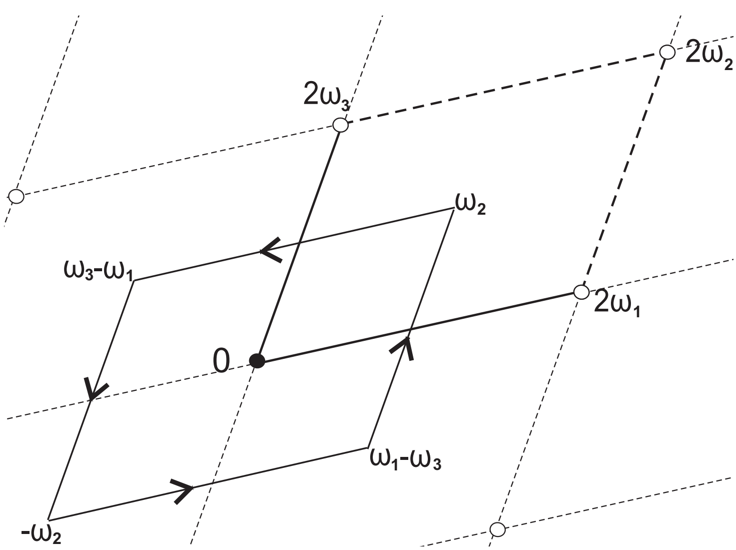


Figura 6.1: Δ y Δ' para ζ

Por lo tanto, gracias al Teorema B.5 (Teorema del Residuo) del Apéndice B, tenemos que:

$$\int_{\gamma} \zeta(z) = 2\pi i Res(\zeta, 0)$$

pero por la Observación 6.2 es claro que $Res(\zeta, 0) = 1$ y por lo tanto:

$$\int_{\gamma} \zeta(z) = 2\pi i \tag{6.2}$$

por otro lado la integral anterior se calcula de manera directa como:

$$\int_{\gamma} \zeta(z) = \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} \zeta(z)dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} \zeta(z)dz + \int_{\omega_2}^{\omega_3-\omega_1} \zeta(z)dz + \int_{\omega_3-\omega_1}^{-\omega_2} \zeta(z)dz \tag{6.3}$$

pero aplicando el cambio de variable $u = z - 2\omega_3$ a la tercera integral de (6.3) y $u = z + 2\omega_1$ a la cuarta integral de (6.3), utilizando las relaciones de (6.1) y recordando que $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \zeta(z) &= \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} \zeta(z)dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} \zeta(z)dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{-\omega_2} \zeta(u+2\omega_3)du + \int_{\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} \zeta(u-2\omega_1)du \\
&= \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} \zeta(z)dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} \zeta(z)dz - \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} \zeta(z+2\omega_3)dz - \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} \zeta(z-2\omega_1)dz \\
&= \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} (\zeta(z) - \zeta(z+2\omega_3))dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} (\zeta(z) - \zeta(z-2\omega_1))dz \\
&= \int_{-\omega_2}^{\omega_1-\omega_3} -2\eta_3 dz + \int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_2} 2\eta_1 dz \\
&= -2\eta_3(\omega_1 - \omega_3 + \omega_2) + 2\eta_1(\omega_2 - \omega_1 + \omega_3) \\
&= -2\eta_3(2\omega_1) + 2\eta_1(2\omega_3) \\
&= 4\omega_3\eta_1 - 4\omega_1\eta_3
\end{aligned}$$

y comparando lo anterior con (6.2) tenemos:

$$2\omega_3\eta_1 - 2\omega_1\eta_3 = \pi i \quad \text{(Primera relación de Legendre)} \tag{6.4}$$

Para obtener las dos relaciones faltantes recordamos que $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$, de donde se deduce que $2\eta_2 = 2\eta_1 + 2\eta_3$, ya que:

$$\begin{aligned}
2\eta_2 &= \zeta(z+2\omega_2) - \zeta(z) \\
&= \zeta(z+2\omega_1+2\omega_3) - \zeta(z) \\
&= \zeta(z+2\omega_1) + 2\eta_3 - \zeta(z) \\
&= (\zeta(z+2\omega_1) - \zeta(z)) + 2\eta_3 = 2\eta_1 + 2\eta_3
\end{aligned}$$

por lo tanto de de (6.4) se sigue que:

$$2\omega_3\eta_1 + \omega_1(2\eta_1 - 2\eta_2) = \pi i$$

y desarrollando obtenemos:

$$2\omega_1\eta_2 - 2\omega_2\eta_1 = -\pi i \quad \text{(Segunda relación de Legendre)}$$

y de nuevo de (6.4) se sigue que:

$$\omega_3(2\eta_2 - 2\eta_3) + 2\omega_1\eta_3 = \pi i$$

y desarrollando obtenemos:

$$2\omega_2\eta_3 - 2\omega_3\eta_2 = -\pi i \quad \text{(Tercera relación de Legendre)}$$

q.e.d

6.3. Función $\boldsymbol{\sigma}$ de Weierstrass

Notación: al igual que con la suma, $\prod\limits_{\omega\in\Omega}{}'$ denota el producto infinito que no toma en cuenta el factor correspondiente a $\omega = 0$.

Definición 6.2. *Se define a* ***la función $\boldsymbol{\sigma}$ de Weierstrass*** *para cualquier $z \in \mathbb{C}$ como:*

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega\in\Omega}{}' \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Lema 6.3. *La función σ de Weierstrass satisface que:*

$$\sigma(z) = z \exp\left(\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du\right)$$

donde $\int_0^z$ denota la integral sobre una curva γ, que une al 0 con z sin pasar por puntos de Ω

Demostración:
Tenemos que gracias al Lema 6.2 :

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

es una serie que converge uniformemente y por lo tanto al integrarla sobre γ, integramos término a término, es decir:

$$\begin{aligned}
\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du &= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \int_0^z \left[\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right] du \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\int_0^z \frac{du}{u-\omega} + \int_0^z \frac{du}{\omega} + \int_0^z \frac{u}{\omega^2} du\right] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\ln(u-\omega)\Big|_0^z + \frac{u}{\omega}\Big|_0^z + \frac{u^2}{2\omega^2}\Big|_0^z\right] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right]
\end{aligned}$$

donde tomamos a la función *ln* en una rama donde sea analítica, luego tomando la función exponencial obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du\right) &= \exp\left(\sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right]\right) \\
&= \prod_{\omega\in\Omega}{}' \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \\
&= \frac{\sigma(z)}{z}
\end{aligned}$$

q.e.d

Observación 6.3. En la demostración del lema anterior notamos que la serie:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right]$$

se obtuvo al integrar la serie en la expresión de ζ que converge uniformemente y por lo tanto gracias al Teorema B.12 (Integral de una Serie) del Apéndice B, la serie obtenida también converge uniformemente.

Proposición 6.2. *La función σ de Weierstrass satisface que:*

i) $\dfrac{d}{dz}\ln(\sigma(z)) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$

ii) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sigma(z)}{z}\right) = 1$

Demostración:
Para ver *i)* notamos que:

$$\begin{aligned}
\ln(\sigma(z)) &= \ln\left(z{\prod_{\omega\in\Omega}}'\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right)\\
&= \ln(z) + {\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\ln\left(1-\frac{z}{\omega}\right)+\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right]
\end{aligned}$$

pero por la Observación 6.3, la serie en la expresión anterior converge uniformemente y por lo tanto al derivar lo hacemos término a término, es decir:

$$\frac{d}{dz}\ln(\sigma(z)) = \frac{1}{z} + {\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right] = \zeta(z)$$

y para ver *ii)* notamos que:

$$\frac{\sigma(z)}{z} = \exp\left({\sum_{\omega\in\Omega}}'\left[\ln\left(1-\frac{z}{\omega}\right)+\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right]\right)$$

pero de nuevo la serie que aparece en la expresión anterior converge uniformemente por lo que gracias a la continuidad de la función *exponencial* al tomar limite cuando $z\to 0$ obtenemos que:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right) = \exp\left({\sum_{\omega\in\Omega}}'\lim_{z\to 0}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\omega}\right)+\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right]\right) = {\prod_{\omega\in\Omega}}'\exp(\ln(1)) = 1$$

q.e.d

Observación 6.4. Notamos que la función σ de Weierstrass es una función entera y que además tiene un cero en cada punto de Ω

Teorema 6.4. *La función σ de Weierstrass es una función impar, es decir:*

$$\sigma(-z) = -\sigma(z)\ \forall\ z\in\mathbb{C}$$

Demostración:
Por el Lema 6.3 tenemos que:

$$\sigma(-z) = -z\exp\left(\int\limits_0^{-z}\left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right)du\right)$$

haciendo el cambio de variable $v = -u$ en la integral y recordando que ζ es una función impar tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma(-z) &= -z\exp\left(\int\limits_0^{z} -\left(\zeta(-v) + \frac{1}{v}\right)dv\right)\\ &= -z\exp\left(\int\limits_0^{z} -\left(-\zeta(v) + \frac{1}{v}\right)dv\right)\\ &= -z\exp\left(\int\limits_0^{z}\left(\zeta(v) - \frac{1}{v}\right)dv\right) = -\sigma(z)\end{aligned}$$

q.e.d

Teorema 6.5. *La función σ de Weierstrass satisface que:*

$$\sigma(z + 2\omega_j) = -\sigma(z)e^{2\eta_j(z+\omega_j)} \text{ para } j = 1, 2, 3$$

donde $2\eta_j = \zeta(z + 2\omega_j) - \zeta(z)$ *para* $j = 1, 2, 3$

Demostración:
Por la Proposición 6.2 tenemos que $\sigma'(z)/\sigma(z) = \zeta(z)$ y por lo tanto para $j = 1, 2, 3$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma'(z + 2\omega_j)}{\sigma(z + 2\omega_j)} &= \zeta(z + 2\omega_j)\\ &= \zeta(z) + 2\eta_j\\ &= \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta_j\end{aligned}$$

así tenemos que:

$$\int \frac{\sigma'(z + 2\omega_j)}{\sigma(z + 2\omega_j)}dz = \int \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}dz + \int 2\eta_j dz$$

y por lo tanto que:

$$\ln(\sigma(z + 2\omega_j)) = \ln(\sigma(z)) + 2\eta_j z + C_j$$

donde C_j son las constantes de integración para cada j. Si aplicamos la función exponencial de ambos lados de la ecuación anterior obtenemos que:

$$\sigma(z+2\omega_j)=\sigma(z)e^{2\eta_j z}e^{C_j} \tag{6.5}$$

y para obtener el valor de $\exp(C_j)$, hacemos $z=-\omega_j$ y recordando que σ es una función impar obtenemos que:

$$\sigma(\omega_j)=-\sigma(\omega_j)e^{-2\eta_j\omega_j}e^{C_j}$$

luego como $\omega_j\notin\Omega$, entonces $\sigma(\omega_j)\neq 0$, por lo que dividendo la última ecuación entre $\sigma(\omega_j)$ tenemos que:

$$1=-e^{-2\eta_j\omega_j}e^{C_j}$$

lo que implica que:

$$e^{C_j}=-e^{2\eta_j\omega_j}$$

y así finalmente sustituyendo el valor anterior en (6.5), tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma(z+2\omega_j)&=\sigma(z)e^{2\eta_j z}\left(-e^{2\eta_j\omega_j}\right)\\&=-\sigma(z)e^{2\eta_j z}e^{2\eta_j\omega_j}\\&=-\sigma(z)e^{2\eta_j(z+\omega_j)}\text{ para } j=1,2,3\end{aligned}$$

q.e.d

6.4. Funciones Elípticas Arbitrarias en términos de $\boldsymbol{\sigma}$ y en términos de $\boldsymbol{\zeta}$

En esta sección presentamos dos importantes resultados que muestran como cualquier función elíptica se puede escribir ya sea en términos de la función σ de Weierstrass o de la la función ζ de Weierstrass.

Teorema 6.6. *Sea f una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Si tenemos que $ord(f,\Delta)=n$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ son los ceros de f en Δ (repitiendo cada cero tantas veces como su orden), y $b_1,b_2,\cdots,b_n$ son los polos de f en Δ (repitiendo cada polo tantas veces como su orden), entonces:*

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_{n-1})\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_{n-1})\sigma(z-b_n')}$$

donde C es una constante, $b_n'=(a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(b_1+\cdots+b_{n-1})$ y σ se obtiene a partir de Ω que depende a su vez de los periodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ de f.

Demostración:
En primer lugar notemos que si $c\in\mathbb{C}$ entonces $\sigma(z-c)=0$ si y sólo si $z-c\in\Omega$, es decir si y sólo si $z\in c+\Omega$. Ahora recordemos que por el Teorema 3.8 para cualquier función elíptica:

$$s(0)-s(\infty)\equiv 0 \pmod{\Omega}$$

y como en este caso $s(0) = a_1 + \cdots + a_n$ y $s(\infty) = b_1 + \cdots + b_n$, entonces:

$$(a_1 + \cdots + a_n) - (b_1 + \cdots b_n) \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

lo que implica que:

$$b'_n - b_n \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

es decir que:

$$b'_n \equiv b_n \pmod{\Omega}$$

y por lo tanto $b_n \in b'_n + \Omega$ y por ende que b_n es un cero de $\sigma(z - b'_n)$. Si entonces definimos a la función φ como sigue:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z - a_1) \cdots \sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1) \cdots \sigma(z - b'_n)}$$

entonces los ceros de φ en Δ, son los ceros de $\sigma(z - a_1) \cdots \sigma(z - a_n)$ es decir: $a_1, \cdots, a_n$, mientras que los polos de φ en Δ, son los ceros de $\sigma(z - b_1) \cdots \sigma(z - b'_n)$ es decir: $b_1, \cdots, b_n$. Por lo tanto tenemos que la función φ tiene los mismos ceros y los mismos polos que la función f en Δ. Además notamos que para $j = 1, 2$:

$$\varphi(z + 2\omega_j) = \frac{\sigma(z + 2\omega_j - a_1) \cdots \sigma(z + 2\omega_j - a_n)}{\sigma(z + 2\omega_j - b_1) \cdots \sigma(z + 2\omega_j - b'_n)}$$

pero por el Teorema 6.5 tenemos que si $c \in \mathbb{C}$:

$$\sigma(z + 2\omega_j - c) = -\sigma(z - c) e^{2\eta_j(z - c + \omega_j)}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi(z + 2\omega_j) &= \frac{(-1)^n \sigma(z - a_1) e^{2\eta_j(z - a_1 + \omega_j)} \cdots \sigma(z - a_n) e^{2\eta_j(z - a_n + \omega_j)}}{(-1)^n \sigma(z - b_1) e^{2\eta_j(z - b_1 + \omega_j)} \cdots \sigma(z - b'_n) e^{2\eta_j(z - b'_n + \omega_j)}} \\
&= \frac{(\sigma(z - a_1) \cdots \sigma(z - a_n)) \left(e^{2\eta_j(z - a_1 + \omega_j)} \cdots e^{2\eta_j(z - a_n + \omega_j)}\right)}{(\sigma(z - b_1) \cdots \sigma(z - b'_n)) \left(e^{2\eta_j(z - b_1 + \omega_j)} \cdots e^{2\eta_j(z - b'_n + \omega_j)}\right)} \\
&= \varphi(z) \left(\frac{e^{2\eta_j(z - a_1 + \omega_j)} \cdots e^{2\eta_j(z - a_n + \omega_j)}}{e^{2\eta_j(z - b_1 + \omega_j)} \cdots e^{2\eta_j(z - b'_n + \omega_j)}} \right) \\
&= \varphi(z) \left(\frac{\exp(2\eta_j(nz + n\omega_j - \sum_{k=1}^{n} a_k))}{\exp(2\eta_j(nz + n\omega_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b'_n))} \right) \\
&= \varphi(z) \exp(2\eta_j(b'_n - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \right))) \\
&= \varphi(z) \exp(2\eta_j(b'_n - b'_n)) \\
&= \varphi(z)
\end{aligned}$$

así pues φ es una función doblemente periódica, además es analítica en todo Δ excepto en $b_1, \cdots, b_n$ y por lo tanto es una función meromorfa en Δ, es decir que φ es una función elíptica y Ω es el conjunto de todos sus periodos. Por lo tanto tenemos que la función f/φ es una función elíptica entera en Δ ya que al tener φ los mismos polos que f en Δ el cociente no tiene polos en Δ, por ende por el Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville) tenemos que:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = C$$

donde C es una constante, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= C\varphi(z) \\ &= C\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_n')} \end{aligned}$$

q.e.d

Corolario. *(Del Teorema 6.6) El teorema anterior es válido si utilizamos cualesquiera*

$$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{n-1}, b_n'$$

con a_j ceros de f, b_j polos de f, que cumplan que $b_n' = (a_1 + \cdots + a_n) - (b_1 + \cdots + b_{n-1})$

Teorema 6.7. *Sea f una función elíptica, con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Si $z_1, z_2, \cdots, z_r$ son los polos de f en Δ donde cada polo z_k tiene orden n_k, con parte principal:*

$$\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \frac{b_{n_k-1}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \cdots + \frac{b_1^{(k)}}{(z-z_k)} \quad \textit{para } k = 1, 2, \cdots, r$$

entonces:

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^{r}\left[b_1^{(k)}\zeta(z-z_k) - \frac{b_2^{(k)}}{1!}\zeta'(z-z_k) + \cdots + (-1)^{n_k-1}\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-z_k)\right]$$

donde C es una constante y ζ se obtiene a partir de Ω que depende a su vez de los periodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ de f.

Demostración:
Recordemos que ζ tiene un polo simple para todo $\omega \in \Omega$, y que $\zeta' = -\wp$ tiene un polo doble para todo $\omega \in \Omega$, si continuamos derivando notamos que $\zeta^{(n)}$ tiene un polo de orden $(n+1)$ para todo $\omega \in \Omega$ y que además es una función elíptica para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tenemos que si $c \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\zeta^{(n)}(z-c) \;\; \text{tiene un polo de orden } (n+1) \text{ para todo } \omega \in c + \Omega$$

así pues $c+\Omega$ contiene los polos de la función $\zeta(z-c)$, todos son simples y con parte principal:

$$\frac{1}{(z-c-\omega)} \;\; \text{para todo } \omega \in \Omega$$

de igual manera $c+\Omega$ contiene los polos de la función $\zeta'(z-c) = -\wp(z-c)$, todos son dobles y con parte principal:

$$\frac{-1}{(z-c-\omega)^2} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega$$

derivando vemos que $c+\Omega$ contiene los polos de la función $\zeta''(z-c) = -\wp'(z-c)$, todos son de orden 3 y con parte principal:

$$\frac{2}{(z-c-\omega)^3} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega$$

de nuevo si continuamos derivando notamos que $c+\Omega$ contiene los polos de la función $\zeta^{(n)}(z-c)$, todos son de orden $(n+1)$ y con parte principal:

$$\frac{(-1)^n n!}{(z-c-\omega)^{n+1}} \quad \text{para todo } \omega \in \Omega$$

Entonces si definimos la función φ como:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{r}\left[b_1^{(k)}\zeta(z-z_k) - \frac{b_2^{(k)}}{1!}\zeta'(z-z_k) + \cdots + (-1)^{n_k-1}\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-z_k)\right]$$

tenemos que φ es una función cuyos polos en Δ coinciden en el orden con los de la función f, y por lo visto de las partes principal de cada función $\zeta^{(n)}(z-c)$, notamos que la parte principal de φ para cada polo es :

$$\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \frac{b_{n_k-1}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \cdots + \frac{b_1^{(k)}}{(z-z_k)} \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots, r$$

que coincide con la parte principal de f en cada polo. Además notamos que φ es una función meromorfa por ser combinación de funciones meromorfas y es además doblemente periódica con periodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ ya que:

$$\varphi(z+2\omega_j) = \sum_{k=1}^{r}\left[b_1^{(k)}\zeta(z+2\omega_j-z_k) + \cdots + (-1)^{n_k-1}\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z+2\omega_j-z_k)\right]$$

pero como:

$$\zeta^{(n)}(z+2\omega_j-z_k) = \begin{cases} \zeta^{(n)}(z-z_k) & si \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ \zeta(z-z_k) + 2\eta_j & si \quad n = 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(z+2\omega_j) &= \sum_{k=1}^{r}\left[b_1^{(k)}\zeta(z-z_k) + 2\eta_j + \cdots + (-1)^{n_k-1}\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-z_k)\right] \\ &= \varphi(z) + 2\eta_j\left(\sum_{k=1}^{r} b_1^{(k)}\right)\end{aligned}$$

pero para toda $k = 1, \cdots r$, sabemos que $b_1^{(k)} = Res(f, z_k)$ donde $z_1, z_2, \cdots, z_r$ son los polos de f en Δ y por lo tanto por el Teorema 3.6 (Segundo Teorema de Liouville) tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{r} b_1^{(k)} = \sum_{k=1}^{r} Res(f, z_k) = 0$$

y por lo tanto $\varphi(z + 2\omega_j) = \varphi(z)$ para $j = 1, 3$. Así pues φ es una función elíptica y por lo tanto $f - \varphi$ es también una función elíptica, pero por tener las mismas partes principales entonces es una función elíptica entera y por lo tanto por el Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville), tenemos que:

$$f(z) - \varphi(z) = C$$

donde C es una constante, y así finalmente concluimos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= C + \varphi(z) \\ &= C + \sum_{k=1}^{r} \left[b_1^{(k)} \zeta(z - z_k) - \frac{b_2^{(k)}}{1!} \zeta'(z - z_k) + \cdots + (-1)^{n_k - 1} \frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k - 1)!} \zeta^{(n_k - 1)}(z - z_k) \right] \end{aligned}$$

q.e.d

Capítulo 7

Más propiedades de las Funciones Elípticas

Por si fuera poco todo lo que sabemos hasta ahora de la función $\wp$ y de las obtenidas a partir de ésta $\wp'$, ζ y σ, dedicamos este capítulo exclusivamente a presentar más propiedades y relaciones de estas funciones. Comenzamos con un Teorema de adición para la función $\wp$, ya que como vimos desde la función Lemniscata, éstos juegan un rol muy importante para las aplicaciones de las funciones periódicas. Además del Teorema de adición presentamos distintas identidades como la fórmula de duplicación relacionada con éste. Luego nos encontramos con un análisis de las funciones elípticas desde una nueva perspectiva, la de los periodos y los invariantes que se presentan no de manera dada si no arbitraria, dicha perspectiva presentara nuevas notaciones y ciertos resultados que utilizaremos en el capítulo final.

7.1. Teoremas de Adición

Aunque en el caso de la lemniscata ya tratamos con una fórmula de adición, ahora es necesario ser más formales al respecto, en el sentido de definir de una manera más estructurada lo que entendemos por un teorema o fórmula de adición:

Definición 7.1. *Decimos que una función $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, satisface un* ***teorema de adición*** *si para cualesquiera $z, u \in G$, los valores $r = f(z), v = f(u)$ y $w = f(z+u)$ satisfacen una relación del tipo:*

$$P(r, v, w) = 0$$

donde $P \in \mathbb{C}[r, v, w]$ es un polinomio en tres variables.

Veamos por ejemplo quién es P en los casos de las funciones trigonométricas y el de la función lemniscata que analizamos en el Capítulo 2:

Ejemplo 7.1. En el caso de las funciones trigonométricas los teoremas de adición se derivan de las relaciones conocidas como las identidades trigonométricas. Por ejemplo, recordemos que para la función *coseno* tenemos que para cualesquiera $z, u \in \mathbb{C}$

$$\cos(z+u) = \cos(z)\cos(u) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(u)$$

luego entonces elevando al cuadrado la identidad trigonométrica anterior se sigue que:

$$\cos^2(z+u) = \cos^2(z)\cos^2(u) - 2\big(\cos(z)\cos(u)\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(u)\big) + \operatorname{sen}^2(z)\operatorname{sen}^2(u) \tag{7.1}$$

pero recordando que:

$$\operatorname{sen}^2(z) = 1 - \cos^2(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C},$$

si sustituimos lo anterior en (7.1) y simplificamos obtenemos:

$$\cos^2(z+u) = 2\cos(z)\cos(u)\big(\cos(z)\cos(u) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(u)\big) - cos^2(z) - cos^2(u) + 1$$

es decir:

$$\cos^2(z+u) = 2\cos(z)\cos(u)\cos(z+u) - cos^2(z) - cos^2(u) + 1$$

pero si consideramos los valores $r = \cos(z), v = \cos(u)$ y $w = \cos(z+u)$, entonces lo anterior implica que:

$$w^2 = 2rvw - r^2 - v^2 + 1.$$

Luego si P es el polinomio en tres variables dado por $P(r, v, w) = w^2 - 2rvw + r^2 + v^2 - 1$, tenemos que se satisface que $P\big(\cos(z), \cos(u), \cos(z+u)\big) = 0$, por lo tanto en efecto la función simplemente periódica *coseno* satisface un teorema de adición

Ejemplo 7.2. Para el caso de la función lemniscata el polinomio P es menos elegante que en el caso del *coseno*, ya que recordando que para toda $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\varphi_l(x+y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1 + \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

y como además probamos que:

$$\varphi_l'(x) = \sqrt{1 - \varphi_l^4(x)}\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

entonces si sustituimos los valores $r = \varphi_l(x), v = \varphi_l(y)$ y $w = \varphi_l(x+y)$, la fórmula de adición de la lemniscata es:

$$w = \frac{r\sqrt{1 - v^4} + v\sqrt{1 - r^4}}{1 + r^2v^2}$$

luego elevando al cuadrado se sigue que:

$$\frac{w^2}{(1 + r^2v^2)^2} = r^2 - r^2v^4 + 2vr\sqrt{(1 - r^4)(1 - v^4)} + v^2 - v^2r^4$$

es decir:

$$\frac{w^2 - r^2 + r^2v^4 - v^2 + v^2r^4}{2vr(1 + r^2v^2)^2} = \sqrt{(1 - r^4)(1 - v^4)}$$

y por lo tanto si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación anterior, multiplicamos ambos lados por el denominador que se obtiene del lado izquierdo y finalmente igualamos a 0, obtenemos un polinomio $P(r, v, w)$ en tres variables que se anula con $r = \varphi_l(x), v = \varphi_l(y)$ y $w = \varphi_l(x+y)$. Por lo que podemos concluir que la función simplemente periódica φ_l satisface un teorema de adición.

Así pues el objetivo de esta sección es encontrar identidades, similares a las que satisfacen las funciones simplemente periódicas, para las funciones elípticas y las demás funciones relacionadas con estas. Para ello comenzamos analizando las relaciones de satisfacen las funciones $\wp$, ζ y σ de Weierstrass, pues hemos mostrado ya la importancia de estas tres para cualquier otra función elíptica:

Lema 7.1. *Sea $\wp = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$ y $u \notin \Omega$, entonces se satisface que:*

$$\wp(z) - \wp(u) = -\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Demostración:
Definimos la función f como sigue: $f(z) = \wp(z) - \wp(u)$, por lo tanto sabemos que f es una función elíptica y además es claro que $ord(f, \Delta) = 2$. Notamos que como $\wp$ es par:

$$f(z) = 0 \text{ si y sólo si } \wp(z) = \wp(u) \text{ si y sólo si } z \equiv \pm u \pmod{\Omega}$$

en particular $u, -u$ son ceros de f y además 0 es un polo doble de f, por lo tanto por el Corolario del Teorema 6.6, tomando $a_1 = u, a_2 = -u, b_1 = 0$ y $b_2' = a_1 - a_2 - b_1 = 0$ tenemos:

$$f(z) = C\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma(z-0)\sigma(z-0)} = C\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)}$$

donde C es una constante, para calcular dicha constante notamos que por un lado:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} z^2 f(z) &= \lim_{z\to 0} z^2(\wp(z) - \wp(u)) \\ &= \lim_{z\to 0} z^2\wp(z) - 0 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{7.2}$$

pues sabemos que $\wp$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$ con parte principal $1/z^2$. Pero por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} z^2 f(z) &= C\lim_{z\to 0} z^2\left(\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)}\right) \\ &= C\frac{\lim_{z\to 0}(\sigma(z-u)\sigma(z+u))}{\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right)^2} \\ &= C\sigma(-u)\sigma(u) \\ &= -C\sigma^2(u) \end{aligned} \tag{7.3}$$

ya que por *ii*) de la Proposición 6.2, $\lim\limits_{z\to 0}(\sigma(z)/z) = 1$ y σ es una función impar. Luego entonces comparando (7.2) con (7.3) obtenemos que:

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(u)}$$

y por lo tanto concluimos que :

$$f(z) = -\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

q.e.d

Teorema 7.1. *(Teorema de Adición para ζ) La función ζ de Weierstrass satisface que:*

$$\zeta(z+u) - \zeta(z) - \zeta(u) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)}$$

con $u \notin \Omega$.

Demostración:
Por el lema anterior tenemos que:

$$\wp(z) - \wp(u) = -\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)}$$

lo que implica:

$$\ln\left(\wp(z) - \wp(u)\right) = \ln\left(-\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)}\right)$$

derivando ambos lados con respecto a z y recordando que $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$, obtenemos:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(u)} = \zeta(z-u) + \zeta(z+u) - 2\zeta(z) \tag{7.4}$$

intercambiando $u \leftrightarrow z$ en (7.4) y recordando que ζ es impar, resulta:

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(z)} = -\zeta(z-u) + \zeta(z+u) - 2\zeta(u) \tag{7.5}$$

así pues sumando (7.4) con (7.5) obtenemos que:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(u)} + \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(z)} = 2\zeta(z+u) - 2\zeta(z) - 2\zeta(u)$$

desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior y luego dividiendo ambos lados entre 2 llegamos a que:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} = \zeta(z+u) - \zeta(z) - \zeta(u)$$

q.e.d

Teorema 7.2. *(Teorema de Adición para $\wp$) La función $\wp$ de Weierstrass satisface*[1] *que:*

$$\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2$$

con $u\notin\Omega$

Demostración:
Recordemos que $\zeta'=-\wp$, entonces al derivar el teorema de adición de ζ con respecto a z, obtenemos que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp''(z)(\wp(z)-\wp(u))-\wp'(z)(\wp'(z)-\wp'(u))}{(\wp(z)-\wp(u))^2}\right)=-\wp(z+u)+\wp(z)$$

partiendo la fracción del lado izquierdo de la ecuación anterior resulta que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(z)(\wp'(z)-\wp'(u))}{(\wp(z)-\wp(u))^2}\right)=-\wp(z+u)+\wp(z) \tag{7.6}$$

intercambiando $u\leftrightarrow z$ en (7.6), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp(u)-\wp(z)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u)(\wp'(u)-\wp'(z))}{(\wp(u)-\wp(z))^2}\right)=-\wp(z+u)+\wp(u) \tag{7.7}$$

entonces al sumar (7.6) con (7.7) el resultado es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp''(z)-\wp''(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(\wp'(z)-\wp'(u))^2}{(\wp(z)-\wp(u))^2}\right)=-2\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)$$

pero recordemos de la Observación (5.1) que $\wp''(z)=6\wp^2(z)-g_2/2$, por lo que:

$$\left(\frac{3(\wp^2(z)-\wp^2(u))}{\wp(z)-\wp(u)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2=-2\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)$$

y como $(\wp^2(z)-\wp^2(u))=(\wp(z)+\wp(u))(\wp(z)-\wp(u))$ se sigue que:

$$3(\wp(z)+\wp(u))-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2=-2\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)$$

finalmente agrupando términos y dividiendo ambos lados entre dos obtenemos:

$$\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2$$

q.e.d

[1] para ver que la fórmula de adición se puede expresar como un polinomio en tres variables en acorde a la Definición 7.1, debemos utilizar que $\wp'(z)=\sqrt{4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3}$ y $\wp'(u)=\sqrt{4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3}$, y luego proceder de manera similar al caso la lemniscata del Ejemplo 7.2

De nuevo haciendo una analogía con las funciones trigonométricas, recordamos que de los teoremas de adición se derivan las identidades del doble ángulo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha) &= 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\end{aligned}$$

De manera similar tenemos el siguiente resultado para la función $\wp$:

Teorema 7.3. *(Fórmula de Duplicación para $\wp$) La función $\wp$ de Weierstrass satisface que:*

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z)$$

con $2z \notin \Omega$.

Demostración:
Del teorema de adición para $\wp$ se sigue que:

$$\wp(z+u) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(u)$$

por lo que tomando límite cuando $u \to z$ de ambos lados obtenemos que:

$$\begin{aligned}\wp(2z) &= \frac{1}{4}\lim_{u\to z}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2 - 2\wp(z)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\lim\limits_{u\to z}\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{z-u}}{\lim\limits_{u\to z}\frac{\wp(z)-\wp(u)}{z-u}}\right)^2 - 2\wp(z)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z)\end{aligned}$$

q.e.d

Obtenemos una identidad notable para la función $\wp'$ que surge como corolario de desarrollar las fórmulas de adición de las funciones elípticas:

Teorema 7.4. *La función $\wp'$ también se puede expresar como:*

$$\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}$$

Demostración:
Del Lema 7.1 se sigue que:

$$\frac{\wp(z)-\wp(u)}{z-u} = -\frac{\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{(z-u)\sigma^2(z)\sigma^2(u)}$$

tomando límite cuando $u \to z$ de ambos lados obtenemos que:

$$\wp'(z) = -\lim_{z\to u} \frac{\sigma(z-u)}{(z-u)} \cdot \lim_{z\to u} \frac{\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)}$$

y como *ii)* de la Proposición 6.2 implica que $\lim\limits_{z\to u} \sigma(z-u)/(z-u) = 1$, se sigue que:

$$\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}$$

q.e.d

El siguiente resultado muestra otro teorema de adición para la función $\wp$:

Teorema 7.5. *Sean $z, u \in \mathbb{C}$ tales que $z \not\equiv \pm u \pmod{\Omega}$, entonces la función $\wp$ de Weierstrass satisface la siguiente relación algebraica:*

$$det \begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(z+u) & -\wp'(z+u) & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Demostración:
Consideremos las siguientes ecuaciones con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\wp(z)' = \alpha\wp(z) + \beta \tag{7.8}$$
$$\wp(u)' = \alpha\wp(u) + \beta \tag{7.9}$$

como $z \not\equiv \pm u \pmod{\Omega}$ entonces $\wp(z) \neq \wp(u)$, lo que implica que podemos determinar de manera única a α y a β, pues despejando α en (7.8) y sustituyendo en (7.9) obtenemos que:

$$\wp(u)' = \left(\frac{\wp'(z) - \beta}{\wp(z)}\right)\wp(u) + \beta$$

lo que implica que:

$$\beta = \frac{\wp(z)\wp'(u) - \wp'(z)\wp(u)}{\wp(z) - \wp(u)}$$

y finalmente volviendo al despeje de α tenemos:

$$\alpha = \frac{\wp(z)\wp'(z) - 2\wp'(z)\wp(u)}{\wp(z)(\wp(z) - \wp(u))}$$

Ahora definamos la función f como sigue:

$$f(y) = \wp(y)' - \alpha\wp(y) - \beta$$

es claro que f es una función elíptica con los mismos periodos que $\wp$ y además sabemos que $ord(\wp', \Delta) = 3$ y que $\wp'$ tiene un polo triple en $0 \in \Delta$, por lo tanto la función f tiene un polo triple en 0, es decir que para f la suma de polos en Δ vale 0, i.e. $s(\infty) = 0$, entonces por el Teorema 3.8 tenemos que:

$$s(0) \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

lo que quiere decir que la suma de ceros de f en Δ es un periodo. Así pues de (7.8) y (7.9) se sigue $y_1 = z, y_2 = u$, son dos ceros no congruentes de f, por lo que si $y_3 \in \Delta$ es el tercer cero con $y_3 \not\equiv u, z \pmod{\Omega}$ entonces:

$$y_3 \equiv -z - u \pmod{\Omega}$$

es decir que en particular $f(-z-u) = 0$, lo que implica junto con la paridad de $\wp$ y la imparidad de $\wp'$ que:

$$-\wp(z+u)' = \alpha\wp(z+u) + \beta \tag{7.10}$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(z+u) & -\wp'(z+u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

de las ecuaciones (7.8), (7.9) y (7.10) se sigue que el vector:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

es una solución del sistema (7.11), pero también la solucion trivial lo es ($v_1 = v_2 = v_3 = 0$), por lo tanto la matriz que representa el sistema es singular, es decir:

$$det \begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(z+u) & -\wp'(z+u) & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

q.e.d

Una aplicación interesante del Teorema de Adición para $\wp$ es que podemos encontrar distintas maneras de expresar los medios periodos:

Ejemplo 7.3. Cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definiendo la siguiente notación:

$$\wp_\alpha(z) = \wp(z+\alpha) \qquad \wp_\beta(z) = \wp(z+\beta) \qquad \wp_{\alpha+\beta}(z) = \wp(z+\alpha+\beta)$$

del Teorema de Adición para $\wp$ se sigue que:

$$\wp_\alpha(z) = \wp(z+\alpha) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(\alpha)$$

pero como α es un medio periodo entonces $\wp(\alpha) = e_1$ y $\wp'(\alpha) = 0$, por lo tanto:

$$\wp_\alpha(z) = \frac{1}{4}\frac{(\wp'(z))^2}{(\wp(z) - e_1)^2} - \wp(z) - e_1$$

y por el Teorema 5.2, $(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\wp_\alpha(z) &= \frac{1}{4}\frac{4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}{(\wp(z) - e_1)^2} - \wp(z) - e_1 \\
&= \frac{(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}{\wp(z) - e_1} - \wp(z) - e_1 \\
&= \frac{\wp^2(z) - (e_2 + e_3)\wp(z) + e_2e_3 - \wp^2(z) + e_1^2}{\wp(z) - e_1} \\
&= \frac{-(e_2 + e_3)\wp(z) + e_2e_3 + e_1^2}{\wp(z) - e_1}
\end{aligned}$$

pero recordemos que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, por lo tanto sumando $e_1\wp(z) - e_1\wp(z) = 0$, al numerador obtenemos que:

$$\wp_\alpha(z) = \frac{e_1\wp(z) + e_2e_3 + e_1^2}{\wp(z) - e_1}$$

y de nuevo sumando $-(e_2 + e_3)e_1 - e_1^2 = 0$, al numerador se sigue que:

$$\wp_\alpha(z) = \frac{e_1(\wp(z) - e_1) + e_1^2 - (e_2 + e_3)e_1 + e_2e_3}{\wp(z) - e_1}$$

por lo que finalmente:

$$\wp_\alpha(z) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{\wp(z) - e_1}$$

y de manera análoga concluimos que:

$$\wp_\beta(z) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(z) - e_3} \qquad \wp_{\alpha+\beta}(z) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(z) - e_2}$$

Recordemos ahora la Figura 4.5, que muestra como para el caso en el que $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ Δ es un rectángulo con vértices en $0, 2\alpha, 2\alpha + 2i\beta$ y $2i\beta$. Además sabemos que $\wp$ es una función inyectiva en el rectángulo con vértices en $0, \alpha, \alpha + i\beta$ y $i\beta$ además recordemos que si $x \in (0, \alpha]$ entonces $\wp(x) \in [e_1, \infty)$. Luego entonces es claro que $\wp_\alpha$ es una traslación de $\wp$, y que $\wp_\alpha$ es inyectiva en el rectángulo con vértices en $\alpha, 2\alpha, 2\alpha + i\beta$ y $\alpha + i\beta$, y cuando $x \in [\alpha, 2\alpha)$ entonces $\wp_\alpha(x) \in [e_1, \infty)$. Por lo tanto tomando las inversas tendremos que para t$\geq e_1$

$$\wp^{-1}(t) \in (0, \alpha] \;\text{ y }\; \wp_\alpha^{-1}(t) \in [\alpha, 2\alpha)$$

Pero por otro lado en el Capítulo 5 obtuvimos a $I = \wp^{-1}$, entonces :

$$\wp^{-1}(t) = \int_t^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} \qquad \text{y} \quad \alpha = \int_{e_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

Si ahora $z = \wp_\alpha^{-1}(t)$ entonces $t = \wp_\alpha(z) = \wp(z + \alpha)$. Así pues de igual manera que en el Capítulo 5, ahora deducimos que para $t > e_1$:

$$\wp_\alpha^{-1}(t) = \int_{\wp(0+\alpha)}^{\wp(z+\alpha)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = \int_{e_1}^{t} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

pero como:

$$t = \wp_\alpha(z) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{\wp(z) - e_1}$$

despejando a $\wp(z)$ obtenemos que:

$$\wp(z) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{t - e_1}$$

y aplicando $\wp^{-1}$ de ambos lados obtenemos:

$$z = \wp^{-1}\left(e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{t - e_1}\right)$$

pero $z = \wp_\alpha^{-1}(t)$, así que:

$$\wp^{-1}\left(e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{t - e_1}\right) = \wp_\alpha^{-1}(t) = \int_{e_1}^{t} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}$$

sin embargo por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_{e_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} \\
&= \int_{e_1}^{t} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} + \int_{t}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} \\
&= \wp^{-1}\left(e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)}{t - e_1}\right) + \wp^{-1}(t)
\end{aligned}$$

entonces en efecto encontramos otra manera para expresar al medio periodo α para toda $t > 1$. Además como corolario obtenemos la expresión $\alpha = \wp_\alpha^{-1}(t) + \wp^{-1}(t)$.

7.2. Relaciones de homogeneidad

En esta sección introducimos una par de nuevas notaciones para la función $\wp$. Vimos que la dependencia de $\wp$ en los medios periodos y más tarde en los invariantes, ya que así como un par de medios periodos determina a los invariantes también un par de invariantes determina a los medios periodos. Por lo tanto hasta ahora hemos denotado a la función $\wp$ como:

$$\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \wp(z|g_2, g_3)$$

Añadimos una tercera notación, dados ω_1, ω_3 dos medios periodos no colineales, construimos a Ω como el conjunto de las combinaciones lineales enteras de los periodos $2\omega_1, 2\omega_3$, así pues tenemos que la función $\wp$ también queda completamente determinada por Ω:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega)$$

de igual manera al ser los invariantes g_2 y g_3 determinados por los medios periodos ω_1, ω_3, para la función $\wp(z) = \wp(z|\Omega)$ denotaremos sus invariantes como:

$$g_2 = g_2(\Omega) = g_2(\omega_1, \omega_3) \qquad g_3 = g_3(\Omega) = g_3(\omega_1, \omega_3)$$

Veamos entonces las relaciones de homogeneidad que satisfacen $\wp, g_2$ y g_3:

Proposición 7.1. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces tenemos que*

i) $\wp(\lambda z|\lambda\Omega) = \dfrac{1}{\lambda^2}\wp(z|\Omega)$

ii) $\wp(z|\lambda\Omega) = \dfrac{1}{\lambda^2}\wp\left(\dfrac{z}{\lambda}\Big|\Omega\right)$

iii) $g_2(\lambda\Omega) = \dfrac{1}{\lambda^4}g_2(\Omega)$

iv) $g_3(\lambda\Omega) = \dfrac{1}{\lambda^6}g_3(\Omega)$

Demostración:
Tenemos que si $\omega \in \lambda\Omega$ y $\omega' = \omega/\lambda$ entonces $\omega' \in \Omega$, luego por la definición de $\wp$:

$$\begin{aligned}
\wp(\lambda z|\lambda\Omega) &= \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \sum_{\omega\in\lambda\Omega}{}' \left[\frac{1}{(\lambda z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\lambda\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z - \omega/\lambda)^2} - \frac{1}{(\omega/\lambda)^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega'\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{(z - \omega')^2} - \frac{1}{\omega'^2}\right]\right) = \frac{1}{\lambda^2}\wp(z|\Omega)
\end{aligned}$$

comprobando entonces ***i)*** y ***ii)***. Ahora bien de la definición de los invariantes se sigue que

$$\begin{aligned}
g_2(\lambda\Omega) &= 60 \sum_{\omega\in\lambda\Omega}{}' \frac{1}{\omega^4} \\
&= \frac{1}{\lambda^4}\left(60 \sum_{\omega\in\lambda\Omega}{}' \frac{1}{(\omega/\lambda)^4}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^4}\left(60 \sum_{\omega'\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega'^4}\right) = \frac{1}{\lambda^4} g_2(\Omega)
\end{aligned}$$

y, de manera análoga

$$g_3(\lambda\Omega) = 140 \sum_{\omega\in\lambda\Omega}{}' \frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{\lambda^6} g_3(\Omega)$$

q.e.d

Las identidades anteriores, además de relacionar a distintas funciones $\wp$, serán de gran utilidad en el siguiente capítulo para probar un par de afirmaciones acerca de los invariantes de dos funciones $\wp$ que varían en sus periodos por un escalamiento dado por una $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

7.3. Parciales con respecto a los periodos e invariantes

La notación introducida en la sección anterior sugiere analizar ahora a las funciones elípticas como una función que depende no únicamente de z si no que también de los medios periodos, podremos así obtener las parciales de dicha función con respecto a sus medio periodos. También por otro lado veremos a los invariantes como una función dependiente de estos medios periodos. A lo largo de esta sección utilizaremos en varias ocasiones la expresión en serie de Laurent de ciertas funciones ya conocidas, compararemos coeficientes de dicha serie para deducir algunas propiedades, remarcando así la importancia que tiene la expresión de una función meromorfa en su serie de Laurent.

Presentamos a continuación dos lemas que son de gran utilidad para poder calcular de manera explícita las parciales de $\wp(z|\omega_1,\omega_3) = \wp(z|g_2,g_3)$ con respecto a ω_1,ω_3, g_2 y g_3:

Lema 7.2. *Sea f una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, enfatizando la dependencia de f en los periodos tenemos que $f(z) = f(z|\omega_1,\omega_3)$ y con Ω el conjunto de periodos de f, entonces la función g dada por*

$$g(z) = \omega_1\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_1} + \omega_3\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_3} + z\frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

es una función elíptica con periodos dados por el conjunto Ω

Demostración:
Para facilitar los cálculos definimos a las funciones f_1, f_3, f' dadas como:

$$f_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial\omega_1}, \quad f_3 \equiv \frac{\partial f}{\partial\omega_3}, \text{ y } f' \equiv \frac{\partial f}{\partial z},$$

Al ser f una función elíptica, si $\omega \in \Omega$, tendremos que $f(z+\omega) = f(z)$, esto es lo mismo que si $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$f(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = f(z) \tag{7.12}$$

considerando a f como una función que depende de z, ω_1 y ω_3, si derivamos (7.12) con respecto a ω_1 obtenemos que:

$$f_1(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) \cdot 1 + f'(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) \cdot 2m = f_1(z) \tag{7.13}$$

y si por otro lado derivamos (7.12) con respecto a ω_3 se sigue que:

$$f_3(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) \cdot 1 + f'(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) \cdot 2n = f_3(z) \tag{7.14}$$

y finalmente como f' es también elíptica se tiene que

$$f'(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = f'(z) \tag{7.15}$$

al multiplicar (7.13) por ω_1, (7.14) por ω_3, (7.15) por z y sumar los resultados tendremos que si $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, entonces

$$\omega_1 f_1(z+\omega) + \omega_3 f_3(z+\omega) + (z+\omega) f'(z+\omega) = \omega_1 f_1(z) + \omega_3 f_3(z) + z f'(z)$$

es decir que $g(z+\omega) = g(z)\ \forall\ \omega \in \Omega$ y por ende que g es una función elíptica con periodos dados por el conjunto Ω **q.e.d**

Lema 7.3. *Sea f una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, enfatizando la dependencia de f en los periodos tenemos que $f(z) = f(z|\omega_1, \omega_3)$, y sea $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega)$ la función cuasi-periódica de Weierstrass obtenida con el conjunto Ω de periodos de f, entonces la función h dada por*

$$h(z) = \eta_1 \frac{\partial f(z)}{\partial \omega_1} + \eta_3 \frac{\partial f(z)}{\partial \omega_3} + \zeta(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

es una función elíptica con periodos dados por el conjunto Ω, donde η_1 y η_3 son las constantes que satisfacen la primera relación de Legendre.

Demostración:
Recordemos que para $j = 1, 2, 3$ tenemos que $\zeta(z + 2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j$, con $j = 2$ teníamos que:

$$\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z + 2\omega_1 + 2\omega_3) = \zeta(z) + 2\eta_1 + 2\eta_2$$

así pues por inducción se sigue que si $\omega \in \Omega$ entonces:

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2 \tag{7.16}$$

y por lo tanto usando la misma notación que el Lema anterior para las funciones f_1, f_3, f', si ahora multiplicamos (7.13) por η_1, (7.14) por η_3, (7.15) por $\zeta(z)$ al sumar los resultados tendremos que si $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, entonces:

$$\eta_1 f_1(z+\omega) + \eta_3 f_3(z+\omega) + [\zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2] f'(z+\omega) = \eta_1 f_1(z) + \eta_3 f_3(z) + \zeta(z) f'(z)$$

y por lo obtenido en (7.16), lo anterior implica que:

$$\eta_1 f_1(z+\omega) + \eta_3 f_3(z+\omega) + \zeta(z+\omega) f'(z+\omega) = \eta_1 f_1(z) + \eta_3 f_3(z) + \zeta(z) f'(z)$$

por lo que $h(z+\omega) = h(z)\ \forall\ \omega \in \Omega$, es decir que h es una función elíptica con periodos dados por el conjunto Ω **q.e.d**

Consideremos ahora el caso en el que la función f es la función $\wp(z|\omega_1, \omega_2)$ de Weierstrass con invariantes $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_3), g_3 = g_3(\omega_1, \omega_3)$. Usaremos los Lemas anteriores para deducir una forma explícita para las parciales de $\wp$ con respecto a sus medios periodos y luego para las parciales con respecto a sus invariantes. Para ello sera necesario recordar cómo es la serie de Laurent de $\wp$ y deducir la de ζ:

Recordemos que por el Teorema 5.1, la serie de Laurent de $\wp$ alrededor del 0 es:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + \cdots \end{aligned} \tag{7.17}$$

del Corolario del Teorema 5.1 se sigue que

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \cdots \\ &= -\frac{2}{z^3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + \cdots \end{aligned} \tag{7.18}$$

Proposición 7.2. *La serie de Laurent para la función ζ de Weierstrass, alrededor del* 0 *es de la forma:*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{60} g_2 z^3 - \frac{1}{140} g_3 z^5 - \cdots$$

Demostración:
Se sigue de la definición de ζ, y usando la expansión (7.17) de $\wp$ ya que:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + \cdots \right) du \\ &= \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{60} g_2 z^3 + \frac{1}{140} g_3 z^5 + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{60} g_2 z^3 - \frac{1}{140} g_3 z^5 - \cdots \end{aligned} \tag{7.19}$$

q.e.d

Parciales de $\wp$ con respecto a ω_1 y ω_3

Ahora bien para deducir la forma explícita de las parciales de $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$ con respecto a sus medios periodos, notemos que por un lado gracias al Lema 7.2 tenemos que la función g dada por

$$g(z) = \omega_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} + z\wp'(z)$$

es una función elíptica con los mismos periodos que $\wp$. Mientras que por otro lado utilizando (7.17) y (7.18) se deduce que:

$$\begin{aligned}
\omega_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} &= \omega_1 \left(\frac{1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} z^2 + \frac{1}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_1} z^4 + \cdots \right) \\
\omega_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} &= \omega_3 \left(\frac{1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} z^2 + \frac{1}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_3} z^4 + \cdots \right) \\
z\wp'(z) &= z \left(-\frac{2}{z^3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + \cdots \right)
\end{aligned}$$

por lo que sumando las tres últimas ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{-2}{z^2} + \left(\frac{\omega_1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\omega_3}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} + \frac{1}{10} g_2 \right) z^2 + \left(\frac{\omega_1}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_1} + \frac{\omega_3}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_3} + \frac{1}{7} g_3 \right) z^4 + \cdots \\
&= -2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{z^2} + p_1(z) \right)}_{p(z)} \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

donde $p_1(z)$ es una función analítica con un cero en $z = 0$. Ahora bien al ser g una función elíptica con los mismos periodos que $\wp$ se sigue que también p lo es, además notamos que como la función tiene los mismos polos que $\wp$ en Δ y por lo tanto en todo $\mathbb{C}$ entonces $\wp/p$ es una función elíptica entera, es decir que gracias al Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville) es constante y por ende existe una constante C tal que:

$$\wp(z) = Cp(z)$$

para calcular C recordamos que por la serie de Laurent de $\wp$, se tiene que $\lim_{z \to 0} z^2 \wp(z) = 1$, mientras que

$$\lim_{z \to 0} z^2 \wp(z) = C \lim_{z \to 0} z^2 p(z) = C \lim_{z \to 0} z^2 \left(\frac{1}{z^2} + p_1(z) \right) = C \lim_{z \to 0} \left(1 + z^2 p_1(z) \right) = C \cdot 1$$

luego entonces $C = 1$, lo que implica que $\wp(z) = p(z)$ por lo que $g(z) = -2\wp(z)$, es decir:

$$\omega_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} + z\wp'(z) = -2\wp(z) \qquad (7.21)$$

Similarmente, por una parte gracias al Lema 7.3 tenemos que la función h dada por

$$h(z) = \eta_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \eta_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} + \zeta(z)\wp'(z)$$

es una función elíptica con los mismos periodos de $\wp$. Por otra parte gracias a las expansiones (7.17), (7.18) y (7.19) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\eta_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} &= \eta_1 \left(\frac{1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} z^2 + \frac{1}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_1} z^4 + \cdots \right) \\
\eta_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} &= \eta_3 \left(\frac{1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} z^2 + \frac{1}{28} \frac{\partial g_3}{\omega_3} z^4 + \cdots \right) \\
\zeta(z)\wp'(z) &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{60} g_2 z^3 - \frac{1}{140} g_3 z^5 - \cdots \right) \left(-\frac{2}{z^3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + \cdots \right) \\
&= -\frac{2}{z^4} + \frac{2}{15} g_2 + \frac{11}{70} g_3 z^2 + \cdots
\end{aligned}$$

entonces al sumar las tres ecuaciones anteriores obtenemos que:

$$h(z) = -\frac{2}{z^4} + \frac{2}{15} g_2 + \left(\frac{11}{70} g_3 + \frac{\eta_1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\eta_3}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} \right) z^2 + \cdots \tag{7.22}$$

además de (7.18) se sigue que alrededor del 0,

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + \frac{1}{10} g_2 + \frac{3}{7} g_3 z^2 + \cdots$$

lo que implica que:

$$\frac{1}{3} \wp''(z) = -\frac{2}{z^4} + \frac{1}{30} g_2 + \frac{1}{7} g_3 z^2 + \cdots$$

y por lo tanto obtenemos que:

$$h(z) + \frac{1}{3} \wp''(z) = \frac{1}{6} g_2 + \left(\frac{3}{10} g_3 + \frac{\eta_1}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\eta_3}{20} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} \right) z^2 + \cdots$$

Sin embargo al ser $h(z)$ y $\wp''(z)/3$ funciones elípticas con los mismos periodos, tenemos que la suma también lo es, pero el lado derecho de la ecuación anterior muestra que la suma no tiene polos alrededor del 0, y es por lo tanto, debido al Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville), es una función elíptica constante. Al evaluar en $z = 0$, obtenemos que dicha constante es $g_2/6$ y por lo tanto tendremos que $h(z) = -\wp''(z) + g_2/6$, recordando que $\wp''(z) = 6\wp^2(z) - g_2/2$ si sigue que $h(z) = -2\wp^2(z) + g_2/3$, es decir:

$$\eta_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \eta_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} + \zeta(z)\wp'(z) = -2\wp^2(z) + \frac{1}{3} g_2 \tag{7.23}$$

así finalmente al unir la ecuación (7.21) y (7.23) tenemos que

$$\omega_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} = -z\wp'(z) - 2\wp(z) \tag{7.24}$$

$$\eta_1 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} + \eta_3 \frac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} = -\zeta(z)\wp'(z) - 2\wp^2(z) + \frac{1}{3}g_2 \tag{7.25}$$

o bien expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ \\ \eta_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} \\ \\ \dfrac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\wp'(z) - 2\wp(z) \\ \\ -\zeta(z)\wp'(z) - 2\wp^2(z) + \frac{1}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

y notemos que el sistema anterior tiene solución ya que gracias a la primera relación de Legendre se tiene que:

$$det \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ \\ \eta_1 & \eta_3 \end{pmatrix} = \omega_1\eta_3 - \omega_3\eta_1 = -\frac{\pi}{2}i \neq 0$$

Por lo que tenemos ya probado el siguiente resultado

Teorema 7.6. *Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ y $\wp(z) = \wp(z|\Omega)$, entonces si $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega)$ es la función cuasi-periódica de Weierstrass, tenemos que las parciales de $\wp$ en z con respecto a los medios periodos ω_1 y ω_3 están dadas por:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_1} \\ \\ \dfrac{\partial \wp(z)}{\partial \omega_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ \\ \eta_1 & \eta_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -z\wp'(z) - 2\wp(z) \\ \\ -\zeta(z)\wp'(z) - 2\wp^2(z) + \frac{1}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

Parciales de $\wp$ con respecto a g_2 y g_3

Obtendremos el correspondiente al Teorema anterior para las parciales con respecto a los invariantes. Recordemos que por la naturaleza de los invariantes, estos determinan a la función $\wp(z) = \wp(z|g_2, g_3)$ de manera única, donde cada invariante depende de los medios periodos, es decir $g_2 = g_2(\omega_1, \omega_3), g_3 = g_3(\omega_1, \omega_3)$. También vimos que dichos invariantes deben satisfacer que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ pues de lo contrario las raíces de la ecuación diferencial no serían distintas. Comencemos entonces por calcular las parciales de los invariantes con respecto a sus medios periodos. Para esto recordemos que en la ecuación (7.20) definimos a una función p que resulto ser $\wp$. De la misma ecuación (7.20) se deduce que la serie de Laurent para la función p alrededor del 0 es de la forma:

$$-2p(x) = \frac{-2}{z^2} + \left(\frac{\omega_1}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\omega_3}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} + \frac{1}{10}g_2 \right) z^2 + \left(\frac{\omega_1}{28}\frac{\partial g_3}{\omega_1} + \frac{\omega_3}{28}\frac{\partial g_3}{\omega_3} + \frac{1}{7}g_3 \right) z^4 + \cdots \tag{7.26}$$

mientras que múltimplicando (7.17) por -2 tenemos que:

$$-2\wp(z) = -\frac{2}{z^2} - \frac{1}{10}g_2z^2 - \frac{1}{14}g_3z^4 + \cdots \tag{7.27}$$

luego entonces como $-2p(z) = -2\wp(z)$, comparando los coeficientes de z^2 en las ecuaciones (7.26) y (7.27) obtenemos:

$$\frac{\omega_1}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\omega_3}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} + \frac{1}{10}g_2 = -\frac{1}{10}g_2$$

agrupando términos y multiplicando por 20 se sigue que:

$$\omega_1\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \omega_3\frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} = -4g_2 \tag{7.28}$$

De forma análoga pero ahora comparando comparando los coeficientes de z^4 en las ecuaciones (7.26) y (7.27), al agrupar y simplificar obtenemos que:

$$\omega_1\frac{\partial g_3}{\omega_1} + \omega_3\frac{\partial g_3}{\omega_3} = -6g_3 \tag{7.29}$$

De manera similar, como vimos que la serie de Laurent para la función h está dada por la ecuación (7.22) y además tenemos que $h(z) = -2\wp^2(z) + g_2/3$, usando (7.17) se deduce que:

$$-2\wp^2(z) + \frac{1}{3}g_2 = -\frac{2}{z^4} + \frac{1}{3}g_2 - \frac{1}{7}g_3z^2 + \cdots \tag{7.30}$$

por lo que al comparar los coeficientes de z^2 en las ecuaciones (7.22) y (7.30) tendremos que:

$$\frac{11}{70}g_3 + \frac{\eta_1}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \frac{\eta_3}{20}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} = -\frac{1}{7}g_3$$

y de nuevo al agrupar y multiplicar por 20 se sigue que:

$$\eta_1\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \eta_3\frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} = -6g_3 \tag{7.31}$$

ahora bien buscamos compararlos coeficientes de z^4 en las ecuaciones (7.22) y (7.30), sin embargo notamos que en nuestras expansiones no incluimos los terminos necesarios para poder hacer la comparación. Esto sucede porque falta agregar un término más a la expansión de (7.17), no se agregó de un principio pues vuelve todas las cuentas pasadas mucho más tediosas. Se puede comprobar comparando la expansión de $6\wp^2(z) - g_2/2$ con la de $\wp''(z)$, que el siguiente termino en (7.17) es equivalente a $(g_2^2/1200)z^6$, luego entonces agregando los términos faltantes a las demás expansiones concluimos que al comparar coeficientes de z^4 en las ecuaciones (7.22) y (7.30), agrupando y simplificando se obtiene:

$$\eta_1\frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} + \eta_3\frac{\partial g_3}{\partial \omega_3} = -\frac{1}{3}g_2^2 \tag{7.32}$$

Usamos las ecuaciones (7.28), (7.29), (7.31) y (7.32) para probar el siguiente Lema, que nos llevara a deducir el problema de las parciales de $\wp$ con respecto a sus invariantes:

Lema 7.4. *Sea f una función que depende de los medios periodos ω_1 y ω_3, y por ende depende implícitamente de los invariantes $g_2(\omega_1,\omega_3), g_3(\omega_1,\omega_3)$, entonces tendremos que:*

$$\omega_1\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_1}+\omega_3\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_3}=-\left(4g_2\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\right)$$
$$\eta_1\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_1}+\eta_3\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_3}=-\frac{1}{2}\left(12g_3\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\right)$$

Demostración:
Usando (7.28) y (7.29) notamos que

$$\begin{aligned}\omega_1\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_1}+\omega_3\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_3}&=\omega_1\left(\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega_1}+\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega_1}\right)+\omega_3\left(\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega_3}+\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega_3}\right)\\&=\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}\left(\omega_1\frac{\partial g_2}{\partial\omega_1}+\omega_3\frac{\partial g_2}{\partial\omega_3}\right)+\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\left(\omega_1\frac{\partial g_3}{\omega_1}+\omega_3\frac{\partial g_3}{\omega_3}\right)\\&=\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}(-4g_2)+\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}(-6g_3)\\&=-\left(4g_2\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\right)\end{aligned}$$

de manera análoga si usamos (7.31) y (7.32) concluimos que

$$\eta_1\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_1}+\eta_3\frac{\partial f(z)}{\partial\omega_3}=-\frac{1}{2}\left(12g_3\frac{\partial f(z)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial f(z)}{\partial g_3}\right)$$

q.e.d

Por lo tanto si $f(z)=\wp(z|g_2,g_3)$, el Lema anterior nos dice que:

$$\omega_1\frac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_1}+\omega_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_3}=-\left(4g_2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}\right)$$
$$\eta_1\frac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_1}+\eta_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_3}=-\frac{1}{2}\left(12g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}\right)$$

si usamos lo obtenido en (7.24) y (7.25), entonces lo anterior es:

$$-z\wp'(z)-2\wp(z)=-\left(4g_2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}\right)$$
$$-\zeta(z)\wp'(z)-2\wp^2(z)+\frac{1}{3}g_2=-\frac{1}{2}\left(12g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}\right)$$

o equivalentemente

$$4g_2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}=z\wp'(z)+2\wp(z)$$
$$12g_3\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\wp(z)}{\partial g_3}=2\zeta(z)\wp'(z)+4\wp^2(z)-\frac{2}{3}g_2$$

y al expresarlo en forma matricial esto es:

$$\begin{pmatrix} 4g_2 & 6g_3 \\ & \\ 12g_3 & \dfrac{2}{3}g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_2} \\ \\ \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\wp'(z) + 2\wp(z) \\ \\ 2\zeta(z)\wp'(z) + 4\wp^2(z) - \frac{2}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

y resulta que el sistema anterior tiene solución, ya que gracias a que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, tenemos que:

$$det \begin{pmatrix} 4g_2 & 6g_3 \\ & \\ 12g_3 & \dfrac{2}{3}g_2^2 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}g_2^3 - 72g_3^2 = \frac{8}{3}\left(g_2^3 - 27g_3^2\right) \neq 0$$

luego entonces queda finalmente demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 7.7. *Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ y $\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|g_2, g_3)$, entonces si $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega)$ es la función cuasi-periódica de Weierstrass, tenemos que las parciales de $\wp$ en z con respecto a los invariantes $g_2 = g_2(\Omega)$ y $g_3 = g_3(\Omega)$ están dadas por:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_2} \\ \\ \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4g_2 & 6g_3 \\ & \\ 12g_3 & \dfrac{2}{3}g_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z\wp'(z) + 2\wp(z) \\ \\ 2\zeta(z)\wp'(z) + 4\wp^2(z) - \frac{2}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 8

La Función Lemniscata en $\mathbb{C}$

En el Capítulo 2 trabajamos con la función lemniscata:

$$\varphi_l : \mathbb{R} \to [-1, 1],$$

vimos que es una función simplemente periódica con periodo fundamental 2ϖ. El objetivo ahora es extender esta función a una de variable compleja, veremos que al extender dicha función a $\mathbb{C}$, tendremos que φ_l es una función elíptica, por lo que apelaremos a conceptos ya tratados de las funciones meromorfas y doblemente periódicas.

Además para mantener sintonía con lo visto para la función lemniscata en $\mathbb{R}$, enunciaremos el Teorema de Abel para la construcción de puntos en la lemniscata con regla y compás, cuya demostración depende fuertemente del análisis de φ_l en $\mathbb{C}$.

Para concluir este trabajo, al ser φ_l una función elíptica, podremos relacionarla con la función $\wp$ de Weierstrass, englobando así todos los temas tratados a lo largo del texto.

8.1. Extensión de $\boldsymbol{\varphi_l}$ a $\mathbb{C}$

Comencemos entonces por extender el dominio de la función lemniscata a los números complejos, para ello nos preguntamos en primera instancia que sucede cuando evaluamos a φ_l en un número imaginario puro, es decir en iy con $y \in \mathbb{R}$. El primer matemático en hacerlo fue Abel, quien sugirió que si $y \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\varphi_l(iy) = i\varphi_l(y) \tag{8.1}$$

lo anterior está motivado por la definición de φ_l, ya que recordemos que $\varphi(y) = r$ si y sólo si:

$$y = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

luego multiplicando ambos lados por i y utilizando $u = it$ como un cambio de variable no del todo justificado (pues no es usual evaluar una integral en un intervalo no real) se sigue que:

$$iy = i \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \int_0^{ir} \frac{1}{\sqrt{1-u^4}} du$$

lo que implica que $\varphi(iy) = ir = i\varphi(y)$, tal como lo definió Abel. Por lo tanto si derivamos tendremos que:

$$\varphi_l'(iy) = \varphi_l'(y) \tag{8.2}$$

Si ahora consideramos $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, por lo tanto por el Teorema 2.3 (Teorema de Adición para φ_l) se sigue que:

$$\varphi_l(z) = \varphi_l(x+iy) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(iy) + \varphi_l(iy)\varphi_l'(x)}{1 + \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(iy)}$$

Si utilizamos las ecuaciones (8.1) y (8.2) en la ecuación anterior, obtenemos la motivación adecuada para dar una definición rigurosa para la lemniscata compleja:

Definición 8.1. *Definimos a* ***la función lemniscata en*** $\mathbb{C}$ *como la función de variable compleja dada por:*

$$\varphi_l(z) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + i\varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1 - \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$

Observación 8.1. Notamos que las ecuaciones (8.1) y (8.2), que de manera "informal" motivaron la definición, son ahora una consecuencia directa de ésta.

Teorema 8.1. *La función lemniscata compleja es una función meromorfa en* $\mathbb{C}$, *además el conjunto:*

$$P_l = \left\{ (m+in)\frac{\varpi}{2} : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ } y \text{ son impares} \right\}$$

representa el conjunto de polos de dicha función.

Demostración:
Se sigue de la Definición 8.1 que φ_l no está definida en $z = x + iy \in \mathbb{C}$ cuando

$$\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y) = 1 \tag{8.3}$$

como $\varphi_l^2(x), \varphi_l^2(y) \leq 1$ basta ver donde $\varphi_l^2(x) = \varphi_l^2(y) = 1$ para que (8.3) se cumpla, pero al ser φ_l una función simplemente periódica en $\mathbb{R}$ con periodo 2ϖ, y como bien sabemos (desde el análisis de φ_l en $\mathbb{R}$) que $\varphi_l(\varpi/2) = \varphi_l(3\varpi/2) = 1$ entonces para toda $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_l\left(\frac{\varpi}{2} + k_1 2\varpi\right) = \varphi_l\left(\frac{3\varpi}{2} + k_2 2\varpi\right) = 1$$

y además sabemos estos son los únicos valores la distancia polar vale uno, de donde se sigue que :

$$\varphi_l\left(\frac{k\varpi}{2}\right) = 1$$

si y sólo si $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y es impar, y por lo tanto tenemos que la ecuación (8.3) se satisface si y sólo si $x = m\varpi/2, y = n\varpi/2$ con $m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ e impares, es decir si y sólo si $z \in P_l$. Por lo tanto φ_l no está definida en P_l. Entonces para ver que φ_l es meromorfa en $\mathbb{C}$ veremos que es analítica en $\mathbb{C}\setminus P_l$, gracias al Teorema B.13 del Apéndice B, basta probar que la función lemniscata satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann para toda $z \notin P_l$. Sea $z \notin P_l$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_l(z) &= \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + i\varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)} \\
&= \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y)}{1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)} + i\frac{\varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)} \\
&= u(x,y) + iv(x,y)
\end{aligned}$$

Luego al calcular las parciales de u con respecto a x y de v con respecto a y notamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\left[1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right]\varphi_l'(x)\varphi_l'(y) + 2\left[\varphi_l(x)\varphi_l'(y)\right]\varphi_l(x)\varphi_l'(x)\varphi_l^2(y)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2} \\
&= \frac{\left[1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right]\varphi_l'(x)\varphi_l'(y) + 2\left[\varphi_l(y)\varphi_l'(x)\right]\varphi_l(y)\varphi_l'(y)\varphi_l^2(x)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Así por un lado se satisface la primera ecuación de Cauchy-Riemann. Por otro lado recordando que por el Teorema 2.2 tenemos que $(\varphi_l'(s))^2 = 1-\varphi_l^4(s)$ y que por la Proposición 2.3 *iv)* se tiene que $\varphi_l''(s) = -2\varphi_l^3(s)$, entonces al calcular la parcial de u con respecto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\left[1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right]\varphi_l(x)\varphi_l''(y) + 2\left[\varphi_l(x)\varphi_l'(y)\right]\varphi_l(x)^2\varphi_l(y)\varphi_l'(y)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2} \\
&= \frac{2\left(\varphi_l^3(x)\varphi_l(y) - \varphi_l(x)\varphi_l^3(y)\right)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2}
\end{aligned}$$

mientras que para la parcial de v con respecto a x tendremos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\left[1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right]\varphi_l(y)\varphi_l''(x) + 2\left[\varphi_l(y)\varphi_l'(x)\right]\varphi_l(x)'\varphi_l(x)\varphi_l^2(y)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2} \\
&= \frac{2\left(\varphi_l(x)\varphi_l^3(y) - \varphi_l^3(x)\varphi_l(y)\right)}{\left(1-\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)\right)^2}
\end{aligned}$$

Por lo que se satisfacen ambas ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por ende φ_l es analítica en $\mathbb{C}\setminus P_l$, luego entonces φ_l es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos dados por el conjunto P_l. **q.e.d**

Presentamos a continuación dos lemas que nos ayudaran a probar que φ_l es una función elíptica, y que además por si solos son resultados importantes para el análisis de φ_l en $\mathbb{C}$:

Lema 8.1. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z, w, z+w \notin P_l$, entonces la fórmula de adición de la función lemniscata compleja es la misma que para el caso real, es decir:*

$$\varphi_l(z+w) = \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(w) + \varphi_l(w)\varphi_l'(z)}{1 + \varphi_l^2(z)\varphi_l^2(w)}$$

Demostración:
Definamos a la función $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por:

$$h(z,w) = \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(w) + \varphi_l(w)\varphi_l'(z)}{1 + \varphi_l^2(z)\varphi_l^2(w)}$$

fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$ y definamos a las funciones f_1, g_1 como $f_1(w) = \varphi_l(x_0+w)$ y $g_1(w) = h(x_0, w)$. Claramente f_1 es analítica en $\mathbb{C}\backslash(-x_0 + P_l)$ mientras que g_1 lo es en $\mathbb{C}\backslash P_l$. En particular por la fórmula de adición de la lemniscata real se sigue que si $w \in \mathbb{R}$ entonces:

$$f_1(w) = \varphi_l(x_0 + w) = h(x_0, w) = g_1(w)$$

por lo tanto f_1 y g_1 coinciden en $\mathbb{R}$, sin embargo, como $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en el conjunto en donde están definidas tanto f_1 como g_1 (ya que $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$), se sigue entonces del Teorema B.1 (Unicidad Global), del Apéndice B, que $f_1(w) = g_1(w)$ para cualquier $w \in \mathbb{C}$ donde f_1 y g_1 sean analíticas, como $x_0 \in \mathbb{R}$ fue arbitraria esto implica que si $x \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{C}\backslash P_l$ son tales que $x + w \notin P_l$, entonces:

$$\varphi_l(x+w) = h(x,w) \tag{8.4}$$

ahora fijemos $w_0 \in \mathbb{C}\backslash P_l$ y definimos a las funciones f_2, g_2, dadas por $f_2(z) = \varphi_l(z + w_0)$ y $g_2(z) = h(z, w_0)$. Entonces f_2 es analítica en $\mathbb{C}\backslash(-w_0 + P_l)$ y g_2 lo es en $\mathbb{C}\backslash P_l$. Ahora gracias a la ecuación (8.4), si $z \in \mathbb{R}$ es tal que $z + w_0 \notin P_l$, entonces

$$f_2(z) = \varphi_l(z + w_0) = h(z, w_0) = g_2(z)$$

es decir que f_2 y g_2 coinciden en $E = \{x \in \mathbb{R} : x + w_0 \notin P_l\}$ y como E tiene un punto de acumulación en el conjunto en donde están definidas tanto f_2 como g_2, el Teorema B.1 (Unicidad Global) implica que si $z \in \mathbb{C}\backslash P_l$ es tal que $z + w_0 \notin P_l$ entonces$f_2(z) = g_1(z)$, pero como elegimos a $w_0 \in \mathbb{C}\backslash P_l$ de manera arbitraria entonces concluimos que si $z, w \in \mathbb{C}\backslash P_l$ tales que $z + w \notin P_l$, entonces

$$\varphi_l(z+w) = h(x,w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}\backslash P_l$$

es decir que si $z, w, z+w \in \mathbb{C}\backslash P_l$ entonces

$$\varphi_l(z+w) = \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(w) + \varphi_l(w)\varphi_l'(z)}{1 + \varphi_l^2(z)\varphi_l^2(w)}$$

q.e.d

Lema 8.2. *Sea $z \in \mathbb{C} \backslash P_l$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces se cumple que:*

$$\varphi_l(z + (m + in)\varpi) = (-1)^{m+n}\varphi_l(z)$$

siempre que $z + (m + in)\varpi \notin P_l$

Demostración:
Recordemos que $\varphi_l'(x) = \pm\sqrt{1 - \varphi_l^4(x)}$ cuando $x \in \mathbb{R}$, como además tenemos que φ_l es creciente en $[0, \varpi/2)$ y decreciente en $[\varpi/2, \varpi]$, entonces tenemos los siguientes valores para la función lemniscata real y su derivada:

x	$\varphi_l(x)$	$\varphi_l'(x)$
0	0	1
$\varpi/2$	1	0
ϖ	0	-1
$3\varpi/2$	-1	0

y además de la Definición 8.1 se sigue que $\varphi_l(iz) = i\varphi_l(z)$ y que $\varphi_l'(iz) = \varphi_l(z)$, usando ésto, la tabla anterior y el hecho de que $\varphi_l(s) = 0$ siempre que s sea un múltiplo de ϖ, obtenemos que si $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\varphi_l(m\varpi) &= \varphi_l(im\varpi) = 0\\ \varphi_l'(m\varpi) &= \varphi_l'(im\varpi) = (-1)^m\end{aligned}$$

lo anterior junto con la fórmula de adición, que es válida en $\mathbb{C}$ por el Lema 8.1, implica que si $z \in \mathbb{C} \backslash P_l$, entonces si:

$$\varphi_l(z + m\varpi) = \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(m\varpi) + \varphi_l(m\varpi)\varphi_l'(z)}{1 + \varphi_l^2(z)\varphi_l^2(m\varpi)} = \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(m\varpi) + 0}{1 + 0} = (-1)^m\varphi_l(z)$$

y de manera análoga obtenemos que $\varphi_l(z + im\varpi) = (-1)^m\varphi_l(z)$. Por lo tanto si $m, n \in \mathbb{C}$ tendremos que:

$$\begin{aligned}\varphi_l(z + (m + in)\varpi) &= \varphi_l(z + m\varpi + in\varpi)\\ &= (-1)^n\varphi_l(z + m\varpi)\\ &= (-1)^{m+n}\varphi_l(z)\end{aligned}$$

q.e.d

Teorema 8.2. *La función lemniscata compleja es una función doblemente periódica con periodos fundamentales dados por:*

$$2\omega_1 = (1 - i)\varpi \quad y \quad 2\omega_3 = (1 + i)\varpi$$

Demostración:
Notemos primero que $(1-i)\varpi, (1+i)\varpi$ son no colineales, ya que:

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{(1-i)\varpi}{(1+i)\varpi}\right) = \mathfrak{Im}\,(-i) = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que $(1-i)\varpi, (1+i)\varpi$ en efecto son periodos que φ_l, ya que del Lema 8.2 se sigue que:

$$\varphi_l(z+(1-i)\varpi) = (-1)^0\varphi_l(z) = \varphi_l(z)$$
$$\varphi_l(z+(1+i)\varpi) = (-1)^2\varphi_l(z) = \varphi_l(z)$$

Para ver que en efecto son periodos fundamentales, en primer lugar definimos al conjunto Ω_l como:

$$\Omega_l = \{m(1-i)\varpi + n(1+i)\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

y notamos que también podemos expresar a Ω_l como:

$$\Omega_l = \{(m+in)\varpi : m+n \equiv 0 \pmod{2}\}$$

Veamos que cualquier periodo pertenece a Ω_l, sea entonces ω un periodo de φ_l, si además $p \in P_l$ es un polo de φ_l, sabemos (desde el Capítulo 1) que también $\omega + p \in P_l$, por lo tanto tendremos que existen m_1, n_1, m_2, n_2 enteros impares tales que:

$$p = (m_1 + in_1)\,\frac{\varpi}{2} \qquad\qquad \omega + p = (m_2 + in_2)\,\frac{\varpi}{2}$$

lo que implica que:

$$\omega = ((m_2 - m_1) + i(n_2 - n_1))\,\frac{\varpi}{2}$$

pero como $(m_2 - m_1)$ y $(n_2 - n_1)$ son pares, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\omega = (k_1 + ik_2)\,\varpi$$

y al ser ω un periodo de φ_l por un lado tenemos que:

$$\varphi_l(z+\omega) = \varphi_l(z)$$

y por otro lado, por el Lema 8.2

$$\varphi_l(z+\omega) = (-1)^{k_1+k_2}\varphi_l(z)$$

por lo que $1 = (-1)^{k_1+k_2}$, es decir que $k_1 + k_2 \equiv 0 \pmod{2}$, lo que implica que $\omega \in \Omega_l$, y por ende que en efecto $(1-i)\varpi$ y $(1+i)\varpi$, son un par de periodos fundamentales de φ_l. Además tenemos que Ω_l es el conjunto de todos los periodos de φ_l. **q.e.d**

Por lo que finalmente queda demostrado el siguiente resultado:

Corolario. *(De los Teoremas 8.1 y 8.2) La función lemniscata compleja es una función elíptica con periodos fundamentales* $(1-i)\varpi$ *y* $(1+i)\varpi$

8.2. El Teorema de Abel

Llego el momento de pagar una deuda al lector. Cuando trabajamos con la función lemniscata en $\mathbb{R}$, el objetivo principal era saber para cuales números naturales n era posible dividir la longitud de arco de la lemniscata en n segmentos iguales usando regla y compás. Logramos probar casos particulares por medio de ejemplos ($n = 5, 6, 8$) sin embargo no teníamos las herramientas para proponer una n en general. Incluso para probar el Teorema 2.4 (ver página 34) recurrimos a introducir, sin justificación alguna, a los números complejos, como ahora estamos analizando a φ_l en $\mathbb{C}$, veamos, con el siguiente ejemplo, por qué fue que usamos a los complejos en dicha demostración:

Ejemplo 8.1. Así como obtuvimos en el Teorema 2.5 un par de fórmulas para calcular $\varphi_l(mx)$ cuando $m \in \mathbb{N}$, estas fórmulas se pueden extender para $\varphi_l(mz)$, cuando $m = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, por ejemplo si $m = 1 + i$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_l((1+i)z) &= \frac{\varphi_l(z)\varphi_l'(iz) + \varphi_l(iz)\varphi_l'(z)}{1 + \varphi_l^2(z)\varphi_l^2(iz)} \\ &= \frac{(1+i)\varphi_l(z)\varphi_l'(z)}{1 - \varphi_l^4(z)}\end{aligned}$$

usando que la identidad $\varphi_l'^2(z) = 1 - \varphi_l^4(z)$ es válida para $z \in \mathbb{C}$ (ésto se puede verificar de manera similar a la prueba del Lema 8.1, es decir usando el Teorema B.1), se sigue que:

$$\varphi_l^2((1+i)z) = \frac{(1+i)^2\varphi_l^2(z)\varphi_l'^2(z)}{\left(1 - \varphi_l^4(z)\right)^2} = \frac{2i\varphi_l^2(z)}{1 - \varphi_l^4(z)} \tag{8.5}$$

y de manera análoga obtenemos que cuando $m = 1 - i$, entonces:

$$\varphi_l^2((1-i)z) = \frac{-2i\varphi_l^2(z)}{1 - \varphi_l^4(z)} \tag{8.6}$$

pero recordando que en el Teorema 2.4, teníamos que

$$r_0 = \varphi_l\left(\frac{x_0}{2}\right) \quad \text{y} \quad r_1 = \varphi_l(x_0)$$

sea $z = \varphi_l\left((1+i)\frac{x_0}{2}\right)$, entonces (8.5) implica que:

$$z^2 = \frac{2i\varphi_l^2(\frac{x_0}{2})}{1 - \varphi_l^4(\frac{x_0}{2})} = \frac{2ir_0^2}{1 - r_0^4}$$

tal cual como se propuso antes sin justificación alguna. Además usando (8.5) y el hecho que $2 = (1-i)(1+i)$, se sigue de manera inmediata que:

$$r_1^2 = \varphi_l(x_0) = \varphi_l\left((1-i)(1+i)\frac{x_0}{2}\right) = \frac{-2i\varphi_l^2\left((1+i)\frac{x_0}{2}\right)}{1 - \varphi_l^4\left((1+i)\frac{x_0}{2}\right)} = \frac{-2iz^2}{1 - z^4} \tag{8.7}$$

mientras que anteriormente tuvimos que realizar varias manipulaciones algebraicas para verificar la igualdad (8.7), y dicha igualdad fue indispensable para la prueba del Teorema.

El ejemplo anterior muestra como la función lemniscata compleja proporciona herramientas para probar resultados acerca de la división de la longitud de arco de la lemniscata. De hecho, matemáticos como Abel y Gauss fueron pioneros en la extension de φ_l a $\mathbb{C}$, cuando buscaron establecer para que n en general era posible la división.

Como notamos en el Ejemplo 2.3, las raíces de los polinomios de la división de la Proposición 2.5 juegan un papel importante para determinar si los puntos de la división en n partes son construibles, pero al tener dichos polinomios un grado "grande" esto sugiere que tendrá varias raíces complejas, y el análisis de dichas raíces complejas requiere, por su puesto, un total conocimiento de la función elíptica φ_l.

Fue Abel quien, usando en parte resultados aquí presentados y herramientas de Álgebra Moderna, logró probar que la división de la lemniscata usando regla y compás es análoga a la de la circunferencia (es decir la construcción de polígonos regulares, probado por Gauss a finales del siglo XVIII), dicho resultado no nos debe sorprender, ya que hemos observado, en múltiples ocasiones, el gran parecido que guardan la función trigonométrica *seno* con φ_l. Enunciamos a continuación el Teorema de Abel y aunque lo que hemos presentado hasta ahora es esencial para una demostración, no desarrollamos las herramientas del Álgebra necesarias para completar una prueba ([24], [8]) :

Teorema 8.3. *(Abel 1826) Sea $n \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

i) *Es posible construir la división en n partes iguales de la longitud de arco de lemniscata usando regla y compás.*

ii) $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ *es construible.*

ii) *n es de la forma:*

$$n = 2^k p_1 \cdots p_s$$

con $k, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $p_1 \cdots p_s$ son distintos números primos de Fermat (es decir primos de la forma $p = 2^{2^m} + 1$ con $m \in \mathbb{N}$)

8.3. Relación entre φ_l y $\wp$

Finamente, explotaremos el hecho obtenido por el Corolario de los Teoremas 8.1 y 8.2, es decir que φ_l es una función elíptica. Al ser elíptica, podemos ahora dar más propiedades basadas en lo que ya sabemos de las funciones elípticas. Veamos por ejemplo el paralelogramo fundamental de φ_l, el cual, para mantener congruencia con las notaciones utilizadas a lo largo del texto con las de este capítulo, denotaremos como Δ_l (Figura 8.1)

Definamos el conjunto:

$$C_l = \{(m + in)\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

luego entonces si $c \in C_l$ tendremos que, gracias al Lema 8.2:

$$\varphi_l(c) = \varphi_l\left((m + in)\varpi\right) = (-1)^{m+n}\varphi_l(\varpi) = (-1)^{m+n} \cdot 0 = 0$$
$$\varphi_l'(c) = \varphi_l'\left((m + in)\varpi\right) = (-1)^{m+n}\varphi_l'(\varpi) = (-1)^{m+n} \cdot (-1) \neq 0$$

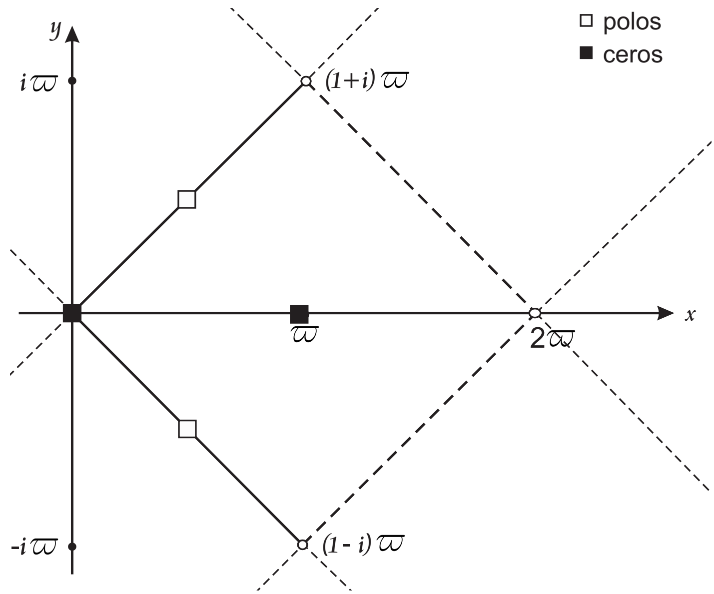


Figura 8.1: Δ_l

por lo tanto c es un cero simple de φ_l, se sigue que C_l es el conjunto de ceros de φ_l y que son todos ceros simples. En particular $\Delta_l \cap C_l = \{0, \varpi\}$, por lo que tenemos:

$$ord(\varphi_l, \Delta_l) = 2$$

Al ser φ_l una función elíptica de orden 2, sabemos que en Δ_l tendrá a lo más dos polos simples ó uno doble, como sabemos que P_l es el conjunto de polos de φ_l, y también notamos que $\Delta_l \cap P_l = \{(1-i)\varpi/2, (1+i)\varpi/2\}$, por lo que los polos son todos simples. En la Figura 8.1 los polos contenidos en Δ_l están señalados con los cuadrados vacios ($\square$), mientras que los dos ceros corresponden a los cuadrados llenos ($\blacksquare$) situados en el origen y al centro del paralelogramo.

Ahora por otro lado es claro que φ_l' es también una función elíptica con los mismos periodos fundamentales que φ_l. Además a lo largo del texto apreciamos que las funciones $\wp, \wp'$ de Weierstrass son de vital importancia para expresar cualquier otra función elíptica. Veremos en esta sección la relación que tienen φ_l y φ_l' con las funciones de Weierestras. Comencemos con una relación notable para ϖ, seguida de dos lemas que serán de gran utilidad más adelante:

Lema 8.3. *Una manera distinta de definir a ϖ es:*

$$\varpi = 2\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - 4u}}$$

Demostración:
Recordemos que:

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

con el cambio de variable $r = 1/\sqrt{u}$, tenemos que si $r \to 0$ entonces $u \to \infty$, si $r \to 1$ resulta que $u \to 1$, y como :

$$dr = -\frac{du}{2u^{3/2}}$$

se sigue que:

$$\begin{aligned}\varpi &= 2\int_\infty^1 -\frac{du}{2u^{3/2}\sqrt{1-(1/\sqrt{u})^4}} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}}\end{aligned}$$

q.e.d

Observación 8.2. (Notación) Recordemos que si $\Omega = \{2m\omega_1 + 2n\omega_3 : m, n \in \mathbb{Z}\}$, para enfatizar la dependencia de los invariantes de $\wp(z|\omega_1, \omega_3)$ en los medios periodos denotamos:

$$g_2 = g_2(\Omega) = g_2(\omega_1, \omega_3) \qquad g_3 = g_3(\Omega) = g_3(\omega_1, \omega_3)$$

así para una misma función $\wp$ tenemos ya tres distintas notaciones:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \wp(z|g_2, g_3)$$

Lema 8.4. *Sea $\Lambda = \{m\varpi + in\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\}$, si $g_2 = 4$ y $g_3 = 0$, entonces:*

$$\wp(z|\Lambda) = \wp(z|g_2, g_3)$$

notemos que en este caso los medios periodos corresponden a $\varpi/2$ y a $i\varpi/2$, y tendremos que:

$$g_2(\Lambda) = 4 \qquad g_3(\Lambda) = 0$$

Demostración:
Como $g_2 = 4$ y $g_3 = 0$, satisfacen que $g_2^3 - 27g_3^2 = 64 > 0$ entonces del Teorema 5.4, se sigue que existen medios periodos $\alpha, i\beta$, tales que la integral:

$$I(y) = \int_\infty^y \frac{du}{\sqrt{4u^3-4u}}$$

es la inversa de la función $\wp(z|\alpha, i\beta)$, y además vimos que α y β estarán dados por:

$$\alpha = \int_{e_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - 4u}} \qquad \beta = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{du}{\sqrt{-4u^3 + 4u}}$$

donde $e_1 > e_2 > e_3$ corresponden a las tres raíces distintas del polinomio $4u^3 - 4u$, es decir que $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = -1$. Lo que implica que $\alpha = \beta$ y además por el Lema 8.3 tenemos que $2\alpha = \varpi$. De donde se sigue que medios periodos la inversa de $I(y)$ son $\varpi/2$ y $i\varpi/2$, por lo tanto:

$$\wp(z|\Lambda) = \wp(z|g_2, g_3)$$

q.e.d

Lema 8.5. *Sea Ω_l el conjunto de periodos de φ_l, entonces si Λ es como en el Lema anterior, sucede que:*

$$\frac{(1+i)}{2}\Omega_l = \Lambda$$

más aún tendremos que:

$$g_2(\Omega_l) = -1 \qquad g_3(\Omega_l) = 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)}{2}\Omega_l &= \frac{(1+i)}{2}\{m(1-i)\varpi + n(1+i)\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \left\{\frac{(1-i)(1+i)}{2} m\varpi + \frac{(1+i)(1+i)}{2} n\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \{m\varpi + in\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\} \\
&= \Lambda
\end{aligned}$$

ahora bien por el lema anterior sabemos que $g_2(\Lambda) = 4$, esto implica que por las relación de homogeneidad para g_2 vista en la Proposición 7.1, si tomamos a $\lambda = (1+i)/2$, entonces:

$$\begin{aligned}
4 &= g_2(\Lambda) \\
&= g_2(\lambda\Omega_l) \\
&= \frac{1}{\lambda^4} g_2(\Omega_l) \\
&= \frac{2^4}{(1+i)^4} g_2(\Omega_l) \\
&= \frac{16}{-4} g_2(\Omega_l) = -4g_2(\Omega_l)
\end{aligned}$$

es decir que $-4g_2(\Omega_l) = 4$ y por lo tanto que $g_2(\Omega_l) = -1$. De forma análoga ahora por la relación homogeneidad para g_3, como $g_3(\Lambda) = 0$, concluimos que entonces $g_3(\Omega_l) = 0$. **q.e.d**

Observación 8.3. Una observación notable de los Lemas 8.4 y 8.5, es que obtenemos con gran facilidad el valor exacto de cuatro series de Eisenstein, pues como $g_2(\Lambda) = 4, g_2(\Omega_l) = -1$ y $g_3(\Lambda) = g_3(\Omega_1) = 0$ se sigue que :

$$\sum_{\omega\in\Lambda}{}' \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{15}\ ,\ \sum_{\omega\in\Omega_l}{}' \frac{1}{\omega^4} = \frac{-1}{60} \quad \text{y} \quad \sum_{\omega\in\Lambda}{}' \frac{1}{\omega^6} = \sum_{\omega\in\Omega_l}{}' \frac{1}{\omega^6} = 0$$

invitamos al lector a tratar de calcular esto de manera directa y aseguramos que desistirá pronto. Otras manera de calcular series de Eisenstein de este estilo son usadas por Adolf Hurwitz en [14] y por Michael Rosen en [24], aunque se basan fuertemente en propiedades de φ_l que se prueban con la teoría de las funciones elipticas desarrollada por Jacobi, la cual omitimos por completo en este trabajo.

Los tres lemas anteriores, además de ser resultados muy interesantes, nos ayudan a probar este teorema final, que da un cierre elegante a este trabajo estableciendo las siguientes relaciones:

Teorema 8.4. *Sea $\wp(z) = \wp(z|\Omega_l)$, la función elíptica de Weierstrass con los mismos periodos fundamentales que φ_l (es decir $(1-i)\varpi$ y $(1+i)\varpi$) entonces:*

$$\varphi_l(z) = -2\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} \qquad y \qquad \varphi_l'(z) = \frac{4\wp^2(z)-1}{4\wp^2(z)+1}$$

Demostración:
Sabemos que φ_l es una función elíptica con periodos fundamentales $(1-i)\varpi$ y $(1+i)\varpi$, que Ω_l es el conjunto de todos los periodos de φ_l, todos sus polos son simples y están dados por el conjunto:

$$P_l = \left\{(m+in)\,\frac{\varpi}{2} : m, n \text{ son impares}\right\}$$

y lo ceros, todos simples también, están dados por el conjunto:

$$C_l = \{(m+in)\varpi : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

los polos y ceros dentro del paralelogramo fundamental Δ_l están ejemplificados en la Figura 8.1. Es claro que en este caso Δ_l también es el paralelogramo fundamental de las funciones elípticas $\wp$ y $\wp'$ y por lo tanto lo es también para la función elíptica $\wp/\wp'$.

Para analizar los polos y ceros de $\wp/\wp'$ en Δ_l , los analizaremos por separado para $\wp$ y $\wp'$. En el caso de $\wp$ sabemos que el único polo en Δ_l es el 0 y de además es doble, para ver los ceros notemos que gracias al Lema 8.5 $g_2(\Omega_l) = g_2 = -1$ y $g_3(\Omega_l) = g_3 = 0$, por lo que tenemos que $g_2^3 - 27g_3^2 = -1 < 0$, y por lo tanto como $\wp(z|\Omega_l) = \wp(z|g_2, g_3)$, por el Teorema 5.5, se sigue que como en este caso los medios periodos son de la forma $\alpha \mp i\alpha$ con $\alpha = \varpi/2$, entonces:

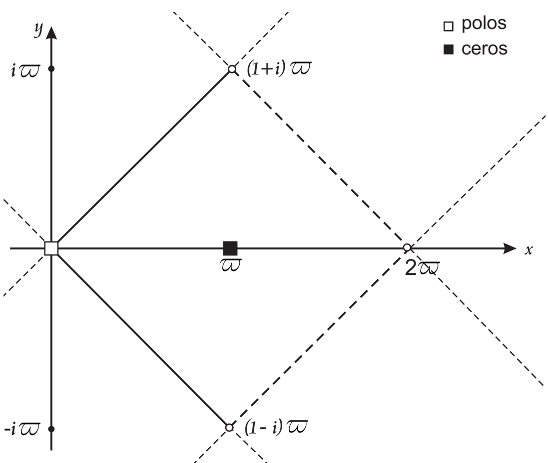
$$2\alpha = \varpi = \int_{e_2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3+u}}$$

donde e_2 es la única raíz real de $4u^3 + u$, es decir que $e_2 = 0$, y por lo tanto:

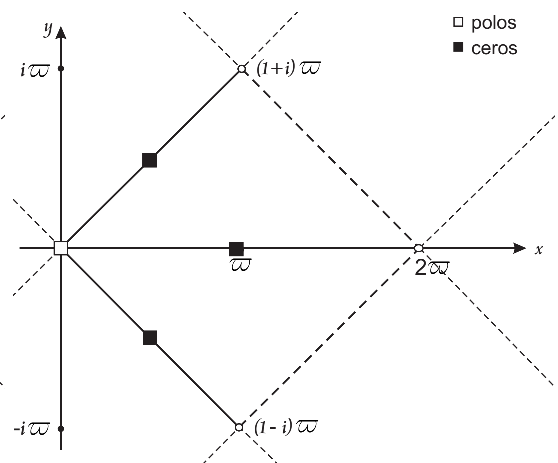
$$\varpi = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 + u}} = \wp^{-1}(0)$$

aplicando $\wp$ de ambos lados obtenemos que $\wp(\varpi) = 0$, por lo tanto ϖ es un cero de $\wp$, como ϖ es el centro de Δ_l se sigue del Teorema 4.6 (sobre la simetría en el paralelogramo) que es un cero doble. Luego entonces como $ord(\wp, \Delta) = 2$ tenemos en la Figura 8.2 (a) representados a todos los polos y ceros de $\wp$ en Δ_l.

Es mucho más sencillo el caso de $\wp'$, ya que de igual forma sabemos que el único polo en Δ_l es el 0 y que éste es de multiplicidad tres, además ya vimos que los tres ceros de $\wp'$ en Δ_l son los medios periodos, que en este caso son $(1-i)\varpi/2, \varpi$ y $(1+i)\varpi/2$, esto queda representado por la Figura 8.2 (b):



(a) $\wp(z|\Omega_l)$



(b) $\wp'(z|\Omega_l)$

Figura 8.2: Polos y Ceros en Δ_l

Luego entonces, al analizar las singularidades de $\wp$ y $\wp'$, tendremos que la función elíptica $\wp/\wp'$ tiene un polo simple en $(1-i)\varpi/2$ y otro en $(1+i)\varpi/2$, ya que estos dos representan ceros del denominador. Sin embargo como ϖ representa un cero doble del numerador ($\wp$) y uno simple del denominador ($\wp'$), entonces ϖ es un cero simple del cociente. Similarmente al ser 0 un polo doble del numerador y uno triple del denominador, tenemos que 0 es un cero simple del cociente (esto se verifica de inmediato utilizando la serie de Laurent).

Así pues tenemos que los polos y ceros de $\wp/\wp'$ en Δ_l están representados por la Figura 8.1, es decir que coinciden con los de φ_l y por lo tanto, por la doble periodicidad de ambas funciones, tenemos que los ceros y polos de $\wp/\wp'$ y φ_l coinciden y están representados por los conjuntos C_l y P_l respectivamente. Entonces por el Teorema 3.5 (Primer Teorema de Liouville), tendremos que existe una constante C tal que:

$$\varphi_l(z) = C\frac{\wp(z)}{\wp'(z)}$$

para calcular C notemos que por un lado

$$\lim_{z\to 0}\frac{\varphi_l(z)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\varphi_l(z)-\varphi_l(0)}{z-0} = \varphi_l'(0) = 1 \tag{8.8}$$

mientras que por otro lado, recordando que el coeficiente en la serie de Laurent (alrededor del 0) es $b_2 = 1$ para $\wp$ y es $b_3 = -2$ para $\wp'$, entonces:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\varphi_l(z)}{z} = C\lim_{z\to 0}\frac{z^2\wp(z)}{z^3\wp'(z)} = C\frac{1}{-2} \tag{8.9}$$

entonces igualando (8.8) con (8.9) se tiene que $C = -2$, y por ende que

$$\varphi_l(z) = -2\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} \tag{8.10}$$

como queríamos. Ahora bien, para φ_l', en este caso gracias al Lema 8.5, tendremos que la ecuación diferencial del Teorema 5.2, para $\wp(z|\Omega_l)$ es:

$$\begin{aligned}(\wp'(z))^2 &= 4\wp^3(z) - g_2(\Omega_l)\wp(z) - g_3(\Omega_l)\\ &= 4\wp^3(z) + \wp(z)\end{aligned}$$

además sabemos que esto implica que $\wp''(z) = 6\wp^2(z) + 1/2$. Luego entonces si derivamos (8.10) y sustituimos los valores recién mostrados para $(\wp'(z))^2$ y $\wp''(z)$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\varphi_l'(z) &= \frac{-2(\wp'(z))^2 + 2\wp(z)\wp''(z)}{(\wp'(z))^2}\\ &= \frac{-8\wp^3(z) - 2\wp(z) + 2\wp(z)(6\wp^2(z) + 1/2)}{4\wp^3(z) + \wp(z)}\\ &= \frac{-8\wp^3(z) - 2\wp(z) + 12\wp^3(z) + \wp(z))}{4\wp^3(z) + \wp(z)}\\ &= \frac{4\wp^3(z) - \wp(z)}{4\wp^3(z) + \wp(z)}\\ &= \frac{4\wp^2(z) - 1}{4\wp^2(z) + 1}\end{aligned}$$

completando así la prueba **q.e.d**

Observación 8.4. En 1937 T. Schneider (ver [25] p. 3) probó que para cualquier función $\wp$, es imposible que $\wp(z)$ y z sean ambos algebraicos, por lo tanto cuando $\wp(z) = \wp(z|\Omega_l)$, como tenemos que $\wp(\varpi) = 0$ y 0 es algebraico, luego entonces concluimos que ϖ es un número trascendente.

La demostración del Teorema 8.4 engloba, casi por completo los temas tratados a lo largo de esta tesis, pues además de tratar de la relación que guardan las funciones elípticas de Weierstrass con las funciones obtenidas gracias a la lemniscata, ocupamos resultados que vimos desde el inicio de la tesis, como los Teoremas de Liouville, hasta resultados más avanzados como la inversión de integrales elípticas y la homogeneidad de los invariantes. Aunque el enunciado de este resultado se encuentra en algunos artículos ([9]) éstos fallan en proporcionar una demostración, por lo que lo aquí presentado, incluido los tres lemas precedentes al Teorema 8.4, es una manera novedosa de atacar el problema de la relación entre φ_l y $\wp$, que, además, como ya mencionamos, es una manera muy elegante para concluir la tesis, pues resume de manera interesante los temas tratados a lo largo de ésta.

Apéndice A

Series de Taylor y de Laurent

Serie de Taylor [19]

Recordemos que se define el disco abierto de radio $R > 0$ con centro en z_0 como sigue:

$$D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

y el disco cerrado de radio $R \geq 0$ con centro en z_0 como:

$$\overline{D_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

Teorema A.1. *(Taylor) : Sea $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica donde G es un dominio, entonces $\forall z_0 \in G,\ \exists\ R = R(z_0) > 0$ tal que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge uniformemente en $\overline{D_R(z_0)}$ donde coincide con $f(z)$.

Serie de Laurent [19]

Recordemos que se define la región anular con radios r y R como sigue:

$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

donde $0 \leq r < R \leq \infty$

Notamos que si $z \in A_{r,R}(z_0)$ y existe $\rho > 0$ tal que $\overline{D_\rho(z_0)} \subset A_{r,R}(z_0)$, entonces existen $\rho_1, \rho_2 > 0$ tales que $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ y :

$$\overline{D_\rho(z_0)} \subset A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$$

a los anillos de la forma $A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$ los llamamos subanillos de $A_{r,R}(z_0)$

Teorema A.2. *(Laurent) : Sea* $f : A_{r,R}(z_0) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función analítica con* $0 \leq r < R \leq \infty$, *entonces* $\forall\ z \in A_{r,R}(z_0)$ *se tiene que:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

en donde la convergencia de cada serie es uniforme en cada subanillo cerrado $\overline{A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)}$ *de* $A_{r,R}(z_0)$ *con* $0 \leq r < \rho_1 < \rho_2 < R \leq \infty$
Más aún si ρ *es tal que:* $r < \rho < R$, *entonces:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

Observación A.1. Las siguientes definiciones acerca de la serie de Laurent se dan para el caso en el que z_0 es una **singularidad aislada** de f, tenemos que f es analítica en el anillo $A_{0,R}(z_0)$ con $R > 0$:

1) Llamamos **la parte principal de la serie de Laurent** a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

2) Llamamos el **residuo de f en z_0** a b_1 que se denota como $Res(f, z_0)$ donde:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(\zeta) d\zeta = b_1$$

3) Si existe una infinidad de $n \in \mathbb{N}$ tales que $b_n \neq 0$ entonces decimos que z_0 es **una singularidad esencial**.

4) Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \neq 0$ pero $b_j = 0\ \forall j > k$, entonces decimos que z_0 es un **polo de orden k**.

5) Si $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y existe $m > 1$ tal que $a_j = 0\ \forall j = 0, 1, \cdots, m-1$ pero $a_m \neq 0$ entonces z_0 es un **cero de orden m**

6) Si $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces la serie de Laurent de f se reduce a la de Taylor de f solamente si z_0 es una **singularidad removible**, es decir si:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Apéndice B

Teoremas

El objetivo del Apéndice B es enunciar, sin probar, los teoremas que usamos durante el texto. Para consultar con detalle las pruebas invitamos al lector a referirse a bibliografía señalada respectivamente al final del enunciado de cada teorema, en su mayoría los teoremas fueron tomados de [18] y [19].

Teorema B.1. *(Unicidad Global) : Sean* $f, g : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dos funciones analíticas en un domino* G *y* $E \subseteq G$ *un subconjunto con un punto de acumulación en* G*, entonces si* $f(z) = g(z)\ \forall z \in E$ *sucede que* $f(z) = g(z)\ \forall z \in G$*.* **[18]**

Teorema B.2. *(Mapeo Abierto) : Sea* $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función analítica y no constante en un dominio* G*, entonces para todo* $U \subseteq G$ *subconjunto abierto de* G*, se tiene que* $V = f(U)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$*.* **[19]**

Teorema B.3. *(Weierstrass) : Sea* $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función analítica en un dominio* G*, si* $K \subseteq G$ *es un subconjunto compacto de* G *y entonces* $f(K)$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$ *y por lo tanto* f *esta acotada en* K*.* **[19]**

Teorema B.4. *(Liouville) : Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función entera. Si existe* $M \in [0, \infty)$ *tal que:*

$$|f(z)| \leq M\ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

entonces f *es una función constante.* **[19]**

Teorema B.5. *(Teorema del Residuo) : Sea* $t \in \underline{[t_1, t_2]}$*, y sea* $\gamma(t)$ *una curva cerrada, i.e.* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *. Si* f *es una función analítica en* $\overline{int(\gamma)}$ *excepto en un conjunto de singularidades aisladas* $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \subset int(\gamma)$*, entonces:*

$$\int_{\gamma(t)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \quad \textbf{[18]}$$

Teorema B.6. *(Principio del Argumento) : Sea $t \in [t_1, t_2]$ con $\gamma(t)$ una curva cerrada, i.e. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ y sea g una función analítica en $\overline{int(\gamma)}$, si f es una función analítica en $\overline{int(\gamma)}$ excepto en un conjunto de polos $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subset int(\gamma)$ donde cada polo b_j tiene orden β_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$, si además $a \in \mathbb{C}$ es un punto arbitrario tal que $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subset int(\gamma)$ son los a-puntos de f donde cada a-punto a_k tiene orden α_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$, entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(t)} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(a_k) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j g(b_j) \quad \textbf{[18]}$$

Teorema B.7. *(Prueba M de Weierstrass) : Si $G \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio y $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones ($g_k : G \to \mathbb{C}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$) tal que:*

i) $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ *existe* $M_k > 0$ *tal que* $|g_k(z)| \leq M_k\ \forall\ z \in G$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$

entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ *converge absoluta y uniformemente en G.* **[19]**

Teorema B.8. *(Mapeo Conforme) : Sea G un dominio y $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica en G, entonces la funcion f es un mapeo conforme de primer tipo en todo punto $z_0 \in G$ donde $f'(z_0) \neq 0$.* **[18]**

Teorema B.9. *(Raíces Conjugadas) : Sea $p(z)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales, si existe $z_j \in \mathbb{C}$ raíz del polinomio entonces $\overline{z_j}$ también es una raíz.* **[5]**

Teorema B.10. *(Factorizacion de Polinomios) : Cualquier polinomio con coeficientes reales de grado n, se puede factorizar en polinomios con coeficientes reales de grado 1 y polinomios con coeficientes reales de grado 2, además dichos polinomios de grado dos tienen discriminante negativo (i.e. son irreducibles en $\mathbb{R}$).* **[5]**

Teorema B.11. *(Fórmula de Leibniz) : Sea $G = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sean $f, \dfrac{\partial f}{\partial t} : G \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en G, entonces si $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ son dos funciones diferenciables en $[c, d]$, se tiene que la función $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\varphi(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$$

es una función diferenciable en $[c, d]$ y más aún su derivada para cada $t \in [c, d]$ esta dada por:

$$\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \quad \textbf{[4]}$$

Teorema B.12. *(Integral de una Serie) : Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ un dominio acotado, $S_1(z)$ una serie que converge uniformente en G y $\gamma : [0,1] \to G$ una curva suave por tramos que une cualquier $a \in G$ con la variable $z \in G$, entonces si $S_2(z)$ es la serie definida al integrar término a término la serie $S_1(z)$ sobre γ, entonces $S_2(z)$ converge uniformente en G.* **[11]**

Teorema B.13. *(Ecuaciones de Cauchy-Riemann) : Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y sea f una función de variable compleja dada por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, con u, v de clase C^1, entonces f es una función analítica si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy- Riemann dadas por:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

y más aún se tiene que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \textbf{[19]}$$

Apéndice C

Una Serie Divergente

En el Capítulo 4, al calcula la convergencia de la serie que aparece en $\wp$, nos vimos en la necesidad de realizar una estimación poco usual para una resta de series del estilo:

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^2}$$

la necesidad de dicha estimación para la resta es debida a que por separado, series como la anterior pueden ser divergentes, aunque la suma converja. Veremos un caso particular de Ω, en donde dicha serie es divergente:

Proposición C.1. *Sea $\Omega = \{m\alpha + in\beta : m, n \in \mathbb{Z}\}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fijos, entonces la serie*

$$\sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^2}$$

diverge.

Demostración:
Notemos en primer lugar que, desarrollando en parte real e imaginaria obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega\in\Omega}{}' \frac{1}{\omega^2} &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\alpha + in\beta)^2} \\ &= \left(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{m^2\alpha^2 - n^2\beta^2}{(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2)^2} \right) + i \left(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{2mn\alpha\beta}{(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2)^2} \right) \end{aligned}$$

y es claro que basta probar que alguna de las dos partes es divergente, tomemos por ejemplo la parte imaginaria:

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{2mn\alpha\beta}{(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2)^2} = 2\alpha\beta \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' m \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n}{(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2)^2}$$

definamos ahora a $S_m(\alpha,\beta)$ como:

$$S_m(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(m^2\alpha^2+n^2\beta^2)^2}$$

y a la función $f_m(\alpha,\beta)$ dada por:

$$f_m(\alpha,\beta)(x) = \frac{x}{(m^2\alpha^2+n^2\beta^2)^2}$$

derivando $f_m(\alpha,\beta)$ obtenemos que es una función decreciente por lo que podemos aplicar el criterio de la integral para series, calculamos entonces la integral:

$$\int_m^{\infty} f_m(\alpha,\beta)(x)dx = \int_m^{\infty} \frac{xdx}{(m^2\alpha^2+n^2\beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2(\alpha+\beta^2)m^2}$$

y como:

$$S_m(\alpha,\beta) \geq \frac{1}{2\beta^2(\alpha+\beta^2)m^2}$$

luego entonces el criterio de la integral nos dice que:

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\alpha+in\beta)^2} \geq 2\alpha\beta \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' mS_m(\alpha,\beta) \geq 2\alpha\beta \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{2\beta^2(\alpha+\beta^2)m^2} = \infty$$

y por lo tanto que la serie en cuestión es divergente. **q.e.d**

Apéndice D

Cambios de Variable

El objetivo es presentar la demostración de dos cambios de variable de integración presentados respectivamente en los Teoremas 5.4 y 5.5 del Capítulo 5. La omisión de estos cambios de variable en el texto es debida a que presentan varias manipulaciones algebraicas, en cierto modo tediosas. Dejarlos en el texto alargarían la demostración de los teoremas correspondientes, perdiendo así el objetivo a demostrar, sin embargo para no quedar en deuda con el lector presentamos aquí el álgebra correspondiente.

Proposición D.1. *(Cambios de variable del Teorema 5.4) Existe un cambio de variable $u(t)$ tal que*

$$\alpha = \int_{e_1}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad donde \quad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

Demostración:
Sea

$$u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{t^2}$$

por lo tanto cuando $u \to \infty$ tenemos que $t \to 0$, y si $u \to e_1$ entonces $t \to 1$, y además tenemos que:

$$du = -\frac{2(e_1-e_3)}{t^3}dt.$$

Esto implica que:

$$\alpha = \int_1^0 \frac{-2(e_1-e_3)dt}{2t^3\sqrt{\left(e_3-e_1+\frac{e_1-e_3}{t^2}\right)\left(e_3-e_2+\frac{e_1-e_3}{t^2}\right)\left(\frac{e_1-e_3}{t^2}\right)}}$$

factorizando a $(e_1 - e_3)/t^3$ en el denominador y cancelando obtenemos

$$\alpha = \int_1^0 \frac{-dt}{\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{(1-t^2)\left(1 - \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}t^2\right)}}$$

por lo que remplazando el valor de k^2 e invirtiendo los límites de integración concluimos que:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

q.e.d

Observación D.1. El cambio utilizado para β en el Teorema 5.4 es análogo a lo anterior, pero usando

$$u = e_1 + \frac{e_1 - e_3}{t^2}$$

Proposición D.2. *(Cambios de variable del Teorema 5.5) Existen dos cambios de variable tal que*

$$2\alpha = \int_{e_2}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos(\theta) + 1}} \quad \textit{donde} \quad e_2 - e_1 = re^{i\theta} \;\; r > 0$$

Demostración:
Sea

$$u = e_2 + v^2$$

por lo que cuando $u \to \infty$ tenemos que $v \to \infty$ y si $u \to e_2$ tenemos que $v \to 0$, como además:

$$du = 2vdv$$

entonces:

$$2\alpha = \int_0^{\infty} \frac{2vdv}{2\sqrt{(e_2 - e_1 + v^2)(v^2)(e_2 - e_3 + v^2)}}$$

recordemos que en este caso $\overline{e_1} = e_3$ y $e_2 \in \mathbb{R}$, esto implica que $\overline{e_2 - e_1} = e_2 - e_3$, y por lo tanto si usamos la representación polar de $e_2 - e_1 = re^{i\theta}$ con $r > 0$ se sigue que $e_2 - e_3 = re^{-i\theta}$. Luego entonces sustituyendo las representaciones polares y cancelando términos obtenemos que:

$$2\alpha = \int_0^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{(re^{i\theta} + v^2)(re^{-i\theta} + v^2)}}$$

si usamos que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ es inmediato ver que:

$$(re^{i\theta} + v^2)(re^{-i\theta} + v^2) = r^2 + 2rv^2\cos(\theta) + v^4$$

lo que implica que

$$2\alpha = \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{r^2 + 2rv^2\cos(\theta) + v^4}}$$

y si volvemos a cambiar variable con $v = t\sqrt{r}$ se sigue que entonces:

$$2\alpha = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2\cos(\theta) + 1}}$$

q.e.d

Observación D.2. El cambio utilizado para 2β en el Teorema 5.5 es análogo a lo anterior, pero usando

$$u = e_2 - v^2$$

Observación D.3. Los cambios de variable de integración presentados anteriormente parecen no justificados, sin embargo se justifican por que la forma final a la que llega cada cambio de variable es una forma estándar de las integrales elípticas, por lo que cambios similares aparecen frecuentemente en las matemáticas. Ver por ejemplo la sección 2.1, cuando calculamos la longitud de arco de una elipse, la integral final es de la misma forma que la integral obtenida en la Proposición D.1

Apéndice E

Construciones con Regla y Compás

En este Apéndice enunciaremos las definiciones y los resultados básicos de la teoría para construir puntos en el plano usando regla y compás. Cuando nos referimos a regla es a un objeto recto para trazar líneas y no a una regla graduada.

Objetos construibles con regla y compás

Dados los puntos α, β y γ en el plano con $\alpha \neq \beta$ podemos construir usando regla y compás los siguientes objetos:

C1: La linea recta $\mathcal{L}$ que pasa por α y por β.

C2: La circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en γ y de radio igual a la distancia de α a β

Puntos obtenidos de los objetos construibles

De las líneas obtenidas por ***C1*** y las circunferencias por ***C2***, podemos construir los siguientes puntos con regla y compás:

P1: El punto de intersección de dos líneas distintas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

P2: Los puntos de intersección de una línea $\mathcal{L}$ y una circunferencia $\mathcal{C}$.

P3: Los puntos de intersección de dos circunferencias distintas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Podemos ver al plano de puntos como a $\mathbb{C}$. Para ahorrar espacio diremos que $z \in \mathbb{C}$ es un número construible cuando este se pueda construir con regla y compás en acorde con la siguiente definición:

Definición E.1. *Sea $z \in \mathbb{C}$, decimos que z es un **número construible** si existe una sucesión finita de construcciones con regla y compás usando **C1**, **C2**, **P1**, **P2** y **P3**, que comienza con los números 0 y 1 y termina con z. Además denotaremos a $\mathfrak{C} \subset \mathbb{C}$, como el conjunto de números construibles.*

Ejemplo E.1. Veamos que $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathfrak{C}$:
Iniciamos con el $0, 1 \in \mathfrak{C}$, luego usando ***C1***, obtenemos $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el 0 y el 1, es decir a el eje real. Después con ***C2*** trazamos la circunferencia $\mathcal{C}$ centrada en 1 con radio la distancia de 0 a 1 es decir radio 1, y como tenemos que 2 está en la intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{L}$ entonces por ***P2*** es claro que $2 \in \mathfrak{C}$. Continuando de esta manera podemos construir cualquier $n \in \mathbb{N}$. Para los enteros negativos simplemente centramos una circunferencia de radio 1 en el 0 para obtener al -1, y así sucesivamente.

Ahora presentamos el teorema fundamental de los puntos construibles:

Teorema E.1. *El conjunto $\mathfrak{C}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$, más aún resulta que :*

i) *Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $z \in \mathfrak{C}$ si y sólo si $x, y \in \mathfrak{C}$*

ii) *Si $z \in \mathfrak{C}$ entonces $\sqrt{z} \in \mathfrak{C}$*

La importancia del Teorema E.1 radica en que gracias a éste es relativamente fácil identificar números construibles, como podemos ver en los ejemplos de la lemniscata en el Capítulo 2. Si el lector desea ver una prueba del Teorema puede consultar [8] p. 257.

Bibliografía

[1] L.V Ahlfors. Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, 3rd edition, 1979.

[2] N.I. Akhiezer. Elements of the Theory of Elliptic Functions. The American Mathematical Society, Rhode Island, 1990.

[3] T.M. Apostol. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer, New York, 2nd edition, 1990.

[4] R.G Bartle. Introducción al Análisis Matemático. Limusa, México, 1980.

[5] G. Birkhoff and S. MacLane. A Survey of Modern Algebra. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 4th edition, 1977.

[6] C.B. Boyer and U.C. Merzbach. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, New Jersey, 2nd edition, 1991.

[7] A.L Cauchy. Mémoires sur les fonctions complémentaires. Œuvres complètes dÁugustin Cauchy, 1882.

[8] D.A. Cox. Galois Theory. John Wiley & Sons, New Jersey, 2012.

[9] D.A. Cox and T. Hyde. The Galois theory of the lemniscate. Journal of Number Theory, Vol.135, pp. 43–59, 2014.

[10] L.A. DÁntonio. Euler and Elliptic Integrals. Euler at 300: An Apreciation, Mathematical Association of America, pp. 119-129, 2007.

[11] A.R. Forsyth. Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. I. Dover Publications, 1965.

[12] E. Freitag and R. Busam. Complex Analysis. Springer, Heidelberg, 2nd edition, 2009.

[13] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. Linear Algebra. Pearson, New Jersey, 4th edition, 2003.

[14] A. Hurwitz. Üeber die Entwickelungscoefficienten der lemniscatischen Functionen. Mathematische Annalen, Theory, Vol. 51, No. 2, pp. 196-226, 1898.

[15] K Knopp. Theory of Functions, Parte I y II. Dover Publications, 1973.

[16] D.F. Lawden. Elliptic Functions and Aplications. Springer, New York, 1989.

[17] J. Liouville. Leçons sur les fonctions doublement périodiques. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1879.

[18] A.I. Markushevich. Theory of Functions of a Complex Variable, Parte I,II y III. The American Mathematical Society, Rhode Island, 2005.

[19] J.E Marsden. Análisis Básico de Variable Compleja. Trillas, México, 1996, reimpresión 2008.

[20] J.S. Milne. Elliptic Curves. BookSurge Publishers, 2006.

[21] R.M. Porter. Contribuciones de Weierstrass a la variable compleja. Miscelánea Matemática Vol.25, pp. 59-74, 1997.

[22] E.D Rainville. Special Functions. Macmillan Company, New York, 1960.

[23] A. Rice. In Search of the "Birthday" of Elliptic Functions. The Mathematical Intelligencer Vol.30, pp. 48-56, 2009.

[24] M. Rosen. Abel's Theorem on the Lemniscate. The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 6, pp. 387-395, 1981.

[25] T. Schneider. Arithmetishe Untersuchengen Ellipticher Integrale. Mathematische Annalen, Theory, Vol. 113, No. 1, pp. 1-13, 1937.

[26] C.L. Siegel. Topics in Complex Function Theory, Vol. I. Wiley-Interscience, New York, 1969.

[27] E.T. Whittaker and G.N. Watson. A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, New York, 4th edition, 1927, reimpresión 1963.