

Productos Cruzados Torcidos de Álgebras de Banach

arXiv:2509.24106 [math.FA]

Alonso Delfín Ares de Parga
(Colaboración con Carla Farsi y Judith Packer)

Universidad de Colorado-Boulder

20 de Octubre del 2025
58^{vo} Congreso Nacional de la SMM

Outline

- 1 Motivación: Acciones Torcidas
- 2 Hipótesis Fijas
- 3 Productos Cruzados
- 4 Representaciones en espacios L^p

Outline

- 1 Motivación: Acciones Torcidas
- 2 Hipótesis Fijas
- 3 Productos Cruzados
- 4 Representaciones en espacios L^p

Extensiones de Grupos

Decimos que un grupo E es una *extensión* del grupo N por el grupo G si tenemos una sucesión exacta

$$\{1\} \rightarrow N \xhookrightarrow{\iota} E \twoheadrightarrow^{\pi} G \rightarrow \{1\}. \quad (1)$$

Una *sección* de (1) es una función $s: G \rightarrow E$ que satisface $\pi \circ s = \text{id}_G$.

- En general, una sección no tiene por qué ser un homomorfismo.
- Cuando lo es, hay $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(N)$ y $E \cong N \rtimes_{\alpha} G$.
- Cuando no lo es, comparamos $s(x)s(y)$ con $s(xy)$.
- Al ser (1) exacta, dicha comparación define $\sigma: G \times G \rightarrow N$ tal que $s(x)s(y) = \iota(\sigma(x, y))s(xy)$,
- Más aún, $\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)$.

Si $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(N)$ satisface $\alpha_x(\alpha_y(n)) = \sigma(x, y)\alpha_{xy}(n)\sigma(x, y)^{-1}$ y ponemos $E = N \rtimes_{\alpha, \sigma} G$ con operación

$$(m, x) \cdot_{\alpha, \sigma} (n, y) := (m\alpha_x(n)\sigma(x, y), xy),$$

entonces $s(x) := (1_N, x)$ da el cociclo σ .

Un ejemplo

Consideremos los grupos $N = \mathbb{T}$ y $G = \mathbb{Z}^2$. Fijemos $\theta \in [0, 1]$ y definamos $\sigma_\theta: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ como

$$\sigma_\theta(x, y) := \exp(\pi i \theta (x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

$$\{1\} \rightarrow \mathbb{T} \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{T} \rtimes_{\sigma_\theta} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{1\}$$

con $\iota(z) = (z, 0_{\mathbb{Z}^2})$ y $\pi(z, x) = x$. El grupo $\mathbb{T} \rtimes_{\sigma_\theta} \mathbb{Z}^2$ con multiplicación

$$(z, x) \cdot_{\sigma_\theta} (w, y) := (zw\sigma(x, y), xy),$$

es una extensión de $\mathbb{T}$ por $\mathbb{Z}^2$ que no escinde.

Álgebras de grupos

Si $E = N \rtimes_{\alpha} G$ entonces $\mathbb{C}E$, el álgebra del grupo E , es el “producto cruzado” $\mathbb{C}N \rtimes_{\alpha} G$. Más precisamente, $\mathbb{C}E$ es el álgebra de funciones $G \rightarrow \mathbb{C}N$ con soporte finito y multiplicación dada por

$$(f *_{\alpha} g)(x) := \sum_{y \in G} f(y) \alpha_y(g(y^{-1}x)).$$

En general, si $E = N \rtimes_{\alpha, \sigma} G$, entonces $\mathbb{C}E$ es el “producto cruzado torcido” $\mathbb{C}N \rtimes_{\alpha, \sigma} G$ que consiste de las funciones $G \rightarrow \mathbb{C}N$ con soporte finito y multiplicación dada por

$$(f *_{\alpha, \sigma} g)(x) := \sum_{y \in G} f(y) \alpha_y(g(y^{-1}x)) \sigma(y, y^{-1}x).$$

El objetivo de esta plática es generalizar el comportamiento anterior para álgebras de Banach y grupos localmente compactos.

Outline

- 1 Motivación: Acciones Torcidas
- 2 **Hipótesis Fijas**
- 3 Productos Cruzados
- 4 Representaciones en espacios L^p

En esta plática, A siempre será un álgebra de Banach con una aproximación contráctil de la unidad: Existe una red $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en A con $\|e_\lambda\| \leq 1$ y

$$\|e_\lambda a - a\|, \|ae_\lambda - a\| \rightarrow 0.$$

Además asumimos que A está representada no degeneradamente en un espacio de Banach E : Existe un homomorfismo isométrico $\pi: A \rightarrow \mathcal{B}(E)$ tal que

$$\pi(A)E := \text{span}\{\pi(a)\xi: a \in A, \xi \in E\}$$

es un subespacio denso en E . Ambas hipótesis nos sirven para definir, $M(A)$, el álgebra de multiplicadores de A como

$$M(A) := \{t \in \mathcal{B}(E): t\pi(a), \pi(a)t \in \pi(A) \ \forall a \in A\}.$$

Finalmente G siempre será un grupo localmente compacto y fijamos ν_G una medida izquierda de Haar. En particular pondremos

$$dx := d\nu_G(x).$$

Outline

- 1 Motivación: Acciones Torcidas
- 2 Hipótesis Fijas
- 3 Productos Cruzados**
- 4 Representaciones en espacios L^p

Acciones torcidas

Una acción torcida de G en A es un par (α, σ)

$$\begin{aligned}\alpha: G &\rightarrow \text{Aut}(A) & \sigma: G \times G &\rightarrow \text{Inv}_1(M(A)) \\ x &\mapsto \alpha_x := \alpha(x) & (x, y) &\mapsto \sigma_{x,y} := \sigma(x, y)\end{aligned}$$

tal que α es fuertemente continua, σ es estrictamente continua, y

- ① $\alpha_{1_G} = \text{id}_A$, $\sigma(1_G, x) = \sigma(x, 1_G) = \text{id}_{M(A)}$,
- ② $\alpha_x(\alpha_y(a)) = \sigma_{x,y} \alpha_{xy}(a) \sigma_{x,y}^{-1}$,
- ③ $\alpha_z(\sigma_{x,y}) \sigma_{z,xy} = \sigma_{z,x} \sigma_{zx,y}$.

A la tupla (G, A, α, σ) le llamamos un sistema dinámico torcido de Banach.

Definimos $L^1(G, A, \alpha, \sigma)$ como el espacio $L^1(G \rightarrow A, \nu_G)$ equipado con la multiplicación

$$(f *_{\alpha, \sigma} g)(x) := \int_G f(y) \alpha_y(g(y^{-1}x)) \sigma_{y, y^{-1}x} dy.$$

$L^1(G, A, \alpha, \sigma)$ es un álgebra de Banach que satisface nuestras hipótesis fijas.

Representaciones covariantes

Una representación covariante de (G, A, α, σ) consiste en un par (π, u) junto con un espacio de Banach E donde

- ❶ $\pi: A \rightarrow \mathcal{B}(E)$ es un homomorfismo no degenerado y acotado,
- ❷ $u: G \rightarrow \text{Iso}(E)$ es fuertemente continua,
- ❸ $u_x u_y = \pi(\sigma_{x,y}) u_{xy}$,
- ❹ $\pi(\alpha_x(a)) = u_x \pi(a) u_x^{-1}$.

Cada representación covariante (π, u) induce una representación $\pi \rtimes u: L^1(G, A, \alpha, \sigma) \rightarrow \mathcal{B}(E)$ via

$$(\pi \rtimes u)(f) := \int_G \pi(f(x)) u_x dx.$$

De hecho, el mapeo $(\pi, u) \mapsto \pi \rtimes u$ es una biyección entre representaciones covariantes de (G, A, α, σ) y representaciones no degeneradas de $L^1(G, A, \alpha, \sigma)$.

Productos cruzados torcidos

Fijemos $\mathcal{R}$ una clase de representaciones covariantes de (G, A, α, σ) . Únicamente pedimos que $\|\pi\| \leq C_{\mathcal{R}}$ para todo $(\pi, u) \in \mathcal{R}$. Definimos una seminorma en $L^1(G, A, \alpha, \sigma)$ como

$$\|f\|_{\mathcal{R}} := \sup\{\|(\pi \rtimes u)(f)\| : (\pi, u) \in \mathcal{R}\}.$$

Definición

El **producto cruzado torcido de (G, A, α, σ) con respecto a $\mathcal{R}$** se define como la completación de

$$L^1(G, A, \alpha, \sigma) / \ker(\|\cdot\|_{\mathcal{R}}),$$

y lo denotaremos como $F_{\mathcal{R}}(G, A, \alpha, \sigma)$.

- Si $C_{\mathcal{R}} \leq 1$, entonces $F_{\mathcal{R}}(G, A, \alpha, \sigma)$ es un álgebra de Banach que satisface nuestras hipótesis fijas.
- En dicho caso, $F_{\mathcal{R}}(G, A, \alpha, \sigma)$ es el álgebra de Banach universal para representaciones covariantes que son $\mathcal{R}$ -continuas.

Equivalencia de acciones torcidas

Decimos que dos acciones torcidas (α, σ) y (β, ω) de G en A son *equivalentes* si existe $\theta: G \rightarrow \text{Inv}_1(M(A))$ estrictamente continua tal que

- ❶ $\beta_x(a) = \theta_x \alpha_x(a) \theta_x^{-1},$
- ❷ $\omega_{x,y} \theta_{xy} = \theta_x \alpha_x(\theta_y) \sigma_{x,y}.$

En dicho caso ponemos $(\alpha, \sigma) \overset{\theta}{\sim} (\beta, \omega)$ y para cada $(\pi, u) \in \mathcal{R}$ definimos $v = v_{\pi, u}: G \rightarrow \text{Iso}(E)$ como

$$v_x := \widehat{\pi}(\theta_x) u_x.$$

Ponemos $\mathcal{R}_\theta := \{(\pi, v_{\pi, u}): (\pi, u) \in \mathcal{R}\}.$

Teorema (D., Farsi, Packer: 2025)

Si $(\alpha, \sigma) \overset{\theta}{\sim} (\beta, \omega)$, entonces $\mathcal{R}_\theta$ es una clase de representaciones covariantes de (G, A, β, ω) y

$$F_{\mathcal{R}}(G, A, \alpha, \sigma) \overset{1}{\cong} F_{\mathcal{R}_\theta}(G, A, \beta, \omega).$$

Outline

- 1 Motivación: Acciones Torcidas
- 2 Hipótesis Fijas
- 3 Productos Cruzados
- 4 Representaciones en espacios L^p

Álgebras de operadores en espacios L^p

A partir de ahora, asumimos que A actúa no degeneradamente en un espacio L^p . Es decir, fijamos una $p \in [1, \infty)$ y asumimos que hay un espacio de medida (Ω, μ) tal que

$$A \subseteq \mathcal{B}(L^p(\Omega, \mu)).$$

Denotamos por $\mathcal{R}^p$ a la clase de **todas** las representaciones de un sistema dinámico de Banach torcido (G, A, α, σ) actuando únicamente en espacios L^p . Definimos el L^p -producto cruzado torcido como

$$F^p(G, A, \alpha, \sigma) := F_{\mathcal{R}^p}(G, A, \alpha, \sigma)$$

Corolario

Si $(\alpha, \sigma) \overset{\theta}{\sim} (\beta, \omega)$, entonces $F^p(G, A, \alpha, \sigma) \overset{1}{\cong} F^p(G, A, \beta, \omega)$.

Demostración. $\mathcal{R}^p(G, A, \alpha, \sigma)_\theta = \mathcal{R}^p(G, A, \beta, \omega)$. ■

El truco de Packer-Raeburn para eliminar la torción

Es posible “destorcer” una acción de manera estable. Sea $p \in (1, \infty)$ y consideremos el álgebra

$$\mathrm{St}_p(A) := \mathcal{K}(L^p(G)) \otimes_p A \subseteq \mathcal{B}(L^p(G \times \Omega, \nu_G \times \mu)).$$

Sea $p' \in (1, \infty)$ el conjugado de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Entonces el mapeo $L^p(G \rightarrow L^{p'}(G \rightarrow A)) \rightarrow \mathrm{St}_p(A)$ dado por $\psi \mapsto K_\psi$, donde

$$(K_\psi \xi)(x, w) := \int_G \psi(x, y) \xi(y, w) dy,$$

tiene rango denso y satisface $\|K_\psi\| \leq \|\psi\|$.

Teorema (D., Farsi, Packer: 2025)

Existe una acción genuina β de G en $\mathrm{St}_p(A)$ tal que

$$\mathcal{K}(L^p(G)) \otimes_p F^p(G, A, \alpha, \sigma) \stackrel{1}{\cong} F^p(G, \mathrm{St}_p(A), \beta).$$

¡Gracias por su atención!
¿Preguntas?