Integrales y Funciones Elípticas

Alonso Delfín Ares de Parga

Asesor:Guillermo Grabinsky Steider

ITAM

15 de agosto de 2014

Contenido

En general trabajamos con dos clases de funciones de variable compleja, las funciones **analíticas** y las **meromorfas**:

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una **función analítica** en U, si f es diferenciable en cada $z_0 \in U$. Si $U = \mathbb{C}$ entonces decimos que f es una **función entera**.

Definición

Sea U un subconjunto abierto de números complejos, decimos que una función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una **función meromorfa** en U si f es analítica en todo U excepto en $P = \{z_j : j \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subset U$, donde para cada $j \in I$, los z_j son los polos de f.

Contenido

Funciones Periódicas

El análisis de las funciones periódicas (analíticas o meromorfas) es la base de este trabajo:

Definición

Decimos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una **función periódica** si existe $\omega \in \mathbb{C}$ con $\omega \neq 0$ tal que para toda $z \in \mathbb{C}$ sucede que:

$$f(z+\omega) = f(z)$$

Al número complejo ω lo llamamos un **periodo** de la función f.

Polos y Periodos

Notamos que si f tiene un polo de orden k en z_0 y ω es un periodo, entonces f tiene un polo de orden k en $z_0 + \omega$, ya que haciendo $u = z - \omega$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0 + \omega} \big(z - (z_0 + \omega)\big)^k f(z) &= \lim_{u \to z_0} (u - z_0)^k f(u + \omega) \\ &= \lim_{u \to z_0} (u - z_0)^k f(u) \\ &\neq 0, \infty. \end{aligned}$$

Propiedades de los Periodos

De la definición de una función periódica se sigue de inmediato el siguiente resultado:

Teorema

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica con periodos $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ entonces si $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \omega_j$$

es un periodo de f.

lo que implica que para cualquier función periódica existen una infinidad de periodos

Propiedades de los Periodos

Por lo tanto a partir de ahora si f es una función periódica, nos referiremos al conjunto infinito Ω como el conjunto de todos los periodos de f. Es de gran importancia el siguiente resultado acerca del conjunto Ω:

Lema

Sea f una función meromorfa, periódica y no constante, entonces Ω no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.

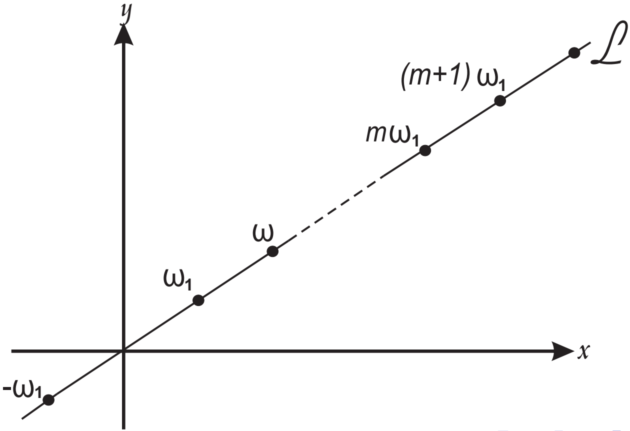
Propiedades de los Periodos

Pues nos permite probar:

Teorema

Sea f una función meromorfa, periódica y no constante y sea $\omega \in \mathbb{C}$ un periodo de f entonces la recta $\mathcal{L}$ que pasa por 0 y por ω contiene a un número complejo $\omega_1 \neq 0$ que es un periodo de f tal que todo periodo de f contenido en $\mathcal{L}$ es de la forma $m\omega_1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Decimos que ω_1 es un **periodo fundamental** *de la función f.*

Propiedades de los Periodos



Funciones Simplemente Periódicas

Notamos que si ω_1 es un periodo fundamental para una función periódica entonces $-\omega_1$ también lo es. Sin embargo veremos que es posible que existan aún más periodos fundamentales, pero por el momento caracterizamos a las funciones que sólo tienen dos:

Definición

Decimos que una función periódica con periodo fundamental ω_1, es **simplemente periódica** si todos sus periodos son de la forma $m\omega_1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Es decir todos sus periodos están contenidos en la recta que pasa por 0 y ω_1.

Funciones Simplemente Periódicas

Ejemplo

La función $f(z) = e^z$ es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$

Pues si $z = x + iy$, entonces:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^x\big(\cos(y+2\pi) + i\,\mathrm{sen}(y+2\pi)\big) \\ &= e^x\big(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)\big) \\ &= e^z \end{aligned}$$

y además se prueba que todo periodo de e^z es de la forma $m2\pi i$ con m $\in \mathbb{Z}$, por lo que los únicos periodos fundamentales son $2\pi i$ y $-2\pi i$.

Contenido

Periodo Fundamental 2π

Supongamos que f es una función periódica y que ω_1 es un periodo fundamental para f. No hay perdida de generalidad en suponer que $\omega_1 = 2\pi$, ya que si g es una función con periodo fundamental $\omega_1 \neq 2\pi$, haciendo el cambio de variable:

$$u = \frac{\omega_1}{2\pi} z$$

obtenemos que:

$$f(z) = g\left(\frac{\omega_1}{2\pi} z\right)$$

es en efecto una función periódica con periodo fundamental 2π

La Clase de Funciones Enteras con Periodo 2π

Teorema

La clase de funciones enteras, periódicas con periodo 2π coincide con la clase de funciones que admiten serie de Fourier de la forma:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} \quad \textit{donde} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Más aún la serie anterior converge uniformemente en cada franja horizontal paralela al eje real.

Coeficientes de Fourier

Una manera alternativa para expresar la serie de Fourier es:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kz) + b_k \operatorname{sen}(kz))$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

La Clase de Funciones Meromorfas con Periodo 2π

Teorema

La clase de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas, con periodo 2π coincide con la clase de funciones de la forma :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

donde g y $h \not\equiv 0$ son funciones enteras, periódicas con periodo 2π.

Contenido

Origen Histórico

Particularmente nos interesa la relación que existe entre las funciones periódicas y las integrales elípticas. En un principio se pensaba que las integrales elípticas surgieron con el problema de calcular la longitud de arco de una elipse, de ahí el nombre de elípticas.
Sin embargo veremos que en realidad surgieron al calcular la longitud de arco de la curva lemniscata, dicha longitud se puede analizar desde el punto de una función que resulta ser una función simplemente periódica en $\mathbb{R}$.

Contenido

Definición

Sea $P \in \mathbb{C}[u]$ un polinomio de grado 3 o 4 sin raíces múltiples, entonces la expresión:

$$\int\limits_{\gamma(t)} R\left(u, \sqrt{P(u)}\right) du \equiv \int\limits_{a}^{z} R\left(u, \sqrt{P(u)}\right) du$$

es una **integral elíptica**, donde $R(u, v)$ representa una función racional de dos variables (generalmente $R \equiv Q(u)/\sqrt{P(u)}$, con $Q \in \mathbb{C}[u]$) y mientras que $\gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$, es una curva suave parametrizada que une al punto $a \in \mathbb{C}$ con la variable z, es decir $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z$. Además el valor de la integral cambia según el valor tomado por la raíz cuadrada y la curva γ elegida.

Definición

Sea $P \in \mathbb{C}[u]$ un polinomio de grado 3 o 4 sin raíces múltiples, entonces:

$$\int\limits_{\gamma(t)} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} \equiv \int\limits_{a}^{z} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$$

es una **integral elíptica de primera especie** donde $\gamma(t)$ con $t \in [0,1]$, es una curva parametrizada que une al punto $a \in \mathbb{C}$ con la variable z, es decir $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z$. Además el valor de la integral cambia según el valor tomado de la raíz cuadrada y la curva γ elegida.

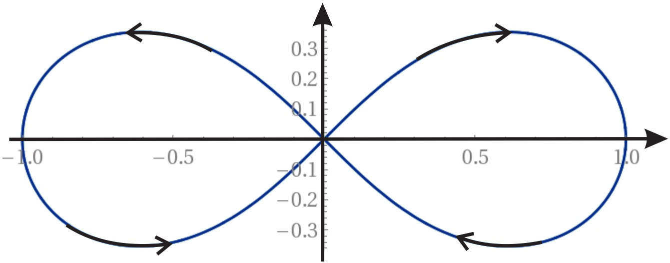
Contenido

La curva Lemniscata

Definición

La **lemniscata** es una curva en $\mathbb{R}^2$ definida por la ecuación:

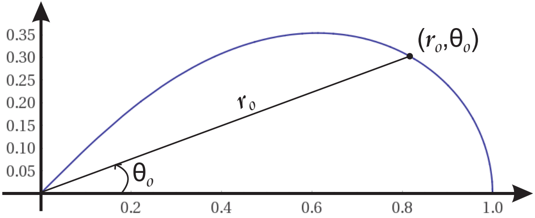
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$



Ecuación polar

La ecuación polar de la lemniscata esta dada por:

$$r^2 = \cos(2\theta)$$



Decimos que un punto (r_0, θ_0) se encuentra a **distancia polar** r_0.

Longitud de Arco

De la ecuación polar se deduce que si un punto en el primer cuadrante de la lemniscata tiene distancia polar r entonces la longitud de arco recorrida del origen hasta este punto está dada por:

$$s = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

Notamos que la longitud de arco es representada por una integral elíptica de primera especie.

$\varpi \simeq 2.622057$

Así como $\pi/2$ representa la longitud de arco de un cuarto de la circunferencia, denotaremos por:

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

la longitud de arco de un cuarto de la lemniscata. Aproximando la integral obtenemos que:

$$\varpi \simeq 2.622057$$

La Función Lemniscata

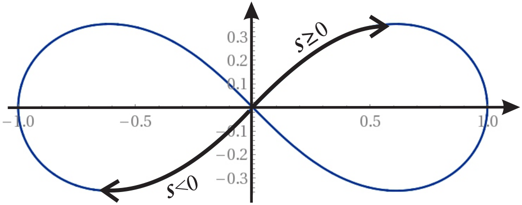
Deseamos saber cuál es la distancia polar de un punto en la lemniscata que se encuentra a una longitud de arco s del origen, para ello definimos la función lemniscata:

Definición

Definimos a **la función lemniscata en** $\mathbb{R}$ como la inversa de la longitud de arco de la lemniscata, es decir es una función φ_l, tal que:

$$\varphi_l(s) = r \Longleftrightarrow s = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

$\varphi_l : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



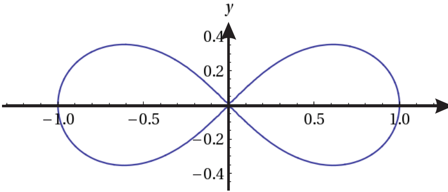
Observamos que si $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\varphi_l(s) = \varphi_l(s + m2\varpi) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$$

por lo que concluimos que φ_l es una función simplemente periódica con periodo fundamental 2ϖ

Valores de φ_l

s	$\varphi_l(s)$
0	0
$\varpi/2$	1
ϖ	0
$3\varpi/2$	-1
$-\varpi/2$	-1
$-\varpi$	0
$-3\varpi/2$	1



Similitudes con el *seno*

Teorema (La Ecuación Diferencial para φ_l)

Sea φ_l la función lemniscata, entonces:

$$\left(\varphi_l'(s)\right)^2 = 1 - \varphi_l^4(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R}$$

que nos recuerda a la clásica identidad trigonométrica:

$$\left(\operatorname{sen}'(t)\right)^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(t) \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

Giulio Carlo di Fagnano

Teorema (Fórmula de Duplicación, 1718)

Sea α la distancia polar de un punto en la lemniscata con longitud de arco s, entonces:

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt + \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt = \int_0^{\gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

donde $\gamma(\alpha) = \dfrac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^4}}{1+\alpha^4}$. *Es decir que* $\gamma(\alpha)$ *es la distancia polar de otro punto de la lemniscata que tiene longitud* $2s$

Un Teorema de Adición

Teorema (Fagnano-Euler, 1751)

Sean α, β las distancias polares de dos puntos en la lemniscata con longitudes x, y respectivamente

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt + \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt = \int_0^{\gamma(\alpha,\beta)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

donde $\gamma(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha\sqrt{1-\beta^4}+\beta\sqrt{1-\alpha^4}}{1+\alpha^2\beta^2}$. *Es decir que* $\gamma(\alpha,\beta)$ *es la distancia polar de un tercer punto sobre la lemniscata con longitud de arco* $x+y$.

Un Teorema de Adición

Así como las funciones trigonométricas satisfacen fórmulas para la suma de ángulos, usando el Teorema de Euler-Fagnano obtenemos un resultado similar para la función lemniscata:

Teorema (Teorema de Adición para φ_l)

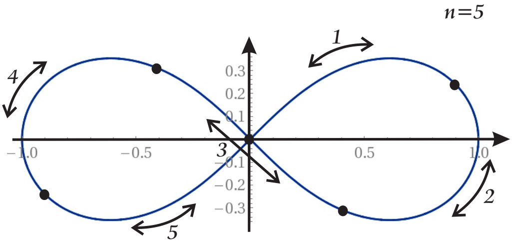
La función φ_l satisface que:

$$\varphi_l(x+y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}$

Aplicación: División con Regla y Compás

Los resultados vistos hasta ahora nos permiten comprobar que es posible la división de la longitud de arco de la lemniscata en n partes iguales cuando $n = 5, 6, 8$, sin embargo no nos permiten conocer una n general. Para ello es necesario analizar a φ_l en el dominio $\mathbb{C}$, lo cual haremos al final.



Contenido

Un Teorema de Jacobi

Vimos que las funciones periódicas que tienen a todos sus periodos contenidos en una recta $\mathcal{L}$ son llamadas simplemente periódicas.

Teorema (Jacobi 1835)

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica no constante, entonces la función tiene a lo más dos periodos fundamentales no colineales.

Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función periódica. Decimos que f es **doblemente periódica** si existen dos periodos fundamentales no colineales ω_1, ω_2, es decir que todo periodo de f es de la forma $m\omega_1 + n\omega_2$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Funciones Doblemente Periódicas

Vimos que para una función simplemente periódica con periodo fundamental ω_1 únicamente $-\omega_1$ es otro periodo fundamental y además son colineales. En el caso de las funciones doblemente periódicas esto no es cierto:

Teorema

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función doblemente periódica con periodos fundamentales ω_1, ω_2 no colineales entonces existen una **infinidad** *de parejas de periodos fundamentales no colineales de f.*

Contenido

Notación para los periodos

Definición

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función doblemente periódica si además f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ entonces decimos que f es **una función elíptica**.

Notación: Si f es una función elíptica con ω' y ω'' un par de periodos fundamentales no colineales, pondremos:

$$\omega' = 2\omega_1 \text{ y } \omega'' = 2\omega_3 \quad \text{si} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) < 0.$$

$$\omega' = 2\omega_3 \text{ y } \omega'' = 2\omega_1 \quad \text{si} \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) > 0.$$

En ambos casos $2\omega_2$ se define como $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3$

El conjunto Ω

Entonces si f es una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ el conjunto de todos los periodos de f es:

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Definición

Diremos que dos complejos son **congruentes** con respecto a los periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ si la resta es un periodo de f, y lo denotamos como:

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\Omega} \iff z_1 - z_2 \in \Omega$$

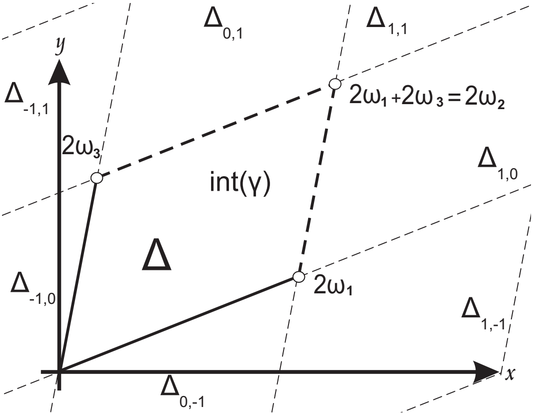
El Paralelogramo Fundamental Δ

Definición

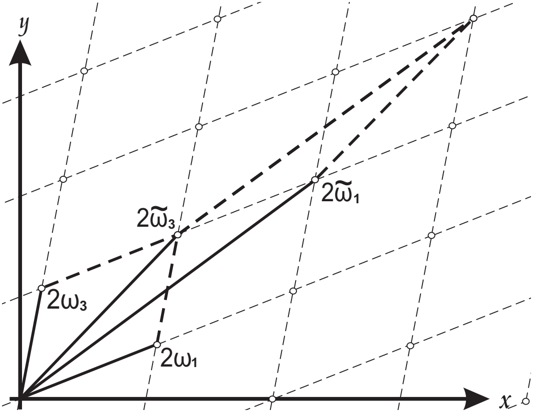
Sea f una función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, definimos al **paralelogramo fundamental** Δ como el interior del paralelogramo con vértices en 0, $2\omega_1$, $2\omega_3$ y $2\omega_2$, unido con los segmentos de recta que unen a 0 con $2\omega_1$ y a 0 con $2\omega_3$.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, definimos a $\Delta_{m,n}$ como el paralelogramo fundamental trasladado, es decir con vértices $2m\omega_1 + 2n\omega_3, (2m+2)\omega_1 + 2n\omega_3, (2m+2)\omega_1 + (2n+2)\omega_3, 2m\omega_1 + (2n+2)\omega_3$. Es claro que $\Delta_{0,0}$ es el paralelogramo fundamental Δ.

El Paralelogramo Fundamental Δ



Vimos que una función doblemente periódica tiene una infinidad de parejas de periodos fundamentales, por lo que también tendrá una infinidad de paralelogramos fundamentales



Teorema

Sea f una función elíptica, entonces

$$f(\Delta) = f(\Delta_{m,n}) \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Teorema

Sea f una función elíptica, si Δ y $\widetilde{\Delta}$ son dos paralelogramos fundamentales distintos entonces:

$$f(\Delta) = f(\widetilde{\Delta})$$
$$\acute{A}rea(\Delta) = \acute{A}rea(\widetilde{\Delta})$$

Contenido

Preliminares

En 1847 el matemático francés Joseph Liouville demostró tres teoremas de vital importancia para el análisis de las funciones elípticas, antes de enunciarlos definiremos los conceptos que engloban dichos teoremas:

Definición

Sea f una función elíptica con paralelogramo fundamental Δ, llamamos el **orden de f** al número total de polos en Δ, donde cada polo debe contarse tantas veces como su orden. Denotamos al orden de f como:

$$ord(f, \Delta)$$

Preliminares

Definición

Sean $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ una función y $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto arbitrario, si $f(z_0) = a$, decimos que z_0 es un **a-punto** de f. Más aún es un a-punto de orden $k \in \mathbb{N}$ si:

$$f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(k)}(z_0)$$

Sea z_0 un a-punto de orden k para una función f entonces:

i) Si $a = 0$, entonces z_0 es un cero de orden k de la función f.

ii) Si $a = \infty$, entonces z_0 es un polo de orden k de la función f.

Preliminares

Definición

Sea f una función elíptica, definimos $n(a) \in \mathbb{N}$ como **el número total de a-puntos de f** en Δ, contados tantas veces como su orden. Notamos que $n(\infty) = ord(f, \Delta)$.

Definición

Sea f una función elíptica, definimos $s(a) \in \mathbb{C}$ como **la suma de los a-puntos de f** en Δ, cada a-punto es sumado tantas veces como su orden.

Los tres Teoremas

Teorema (Los tres Teoremas de Liouville)

1. *Sea f una función elíptica y entera, entonces f es una función constante.*

Los tres Teoremas

Teorema (Los tres Teoremas de Liouville)

1. *Sea f una función elíptica y entera, entonces f es una función constante.*
2. *Sea f una función elíptica, entonces la suma de los residuos de f sobre todos los polos en Δ es igual a cero.*

Los tres Teoremas

Teorema (Los tres Teoremas de Liouville)

1. *Sea f una función elíptica y entera, entonces f es una función constante.*
2. *Sea f una función elíptica, entonces la suma de los residuos de f sobre todos los polos en Δ es igual a cero.*
3. *Sea f una función elíptica no constante y sea $a \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $n(a) = ord(f, \Delta)$, es decir que en Δ el número de a-puntos es el mismo que de polos, contados cada uno tantas veces como su orden.*

Consecuencias

Se sigue de los Teoremas de Liouville que:

Corolario

i) *Si f una función elíptica no constante, entonces f tiene al menos un polo en Δ. Más aún el número de polos en Δ es finito y $ord(f,\Delta) \geq 2$.*

Consecuencias

Se sigue de los Teoremas de Liouville que:

Corolario

i) *Si f una función elíptica no constante, entonces f tiene al menos un polo en Δ. Más aún el número de polos en Δ es finito y $ord(f, \Delta) \geq 2$.*

ii) *Si f una función elíptica no constante y sea $a \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces se cumple que:*

$$s(a) \equiv s(\infty) \pmod{\Omega}$$

Contenido

Vimos que de existir las funciones elípticas, éstas cumplirán con los Teoremas de Liouville y sus consecuencias, sin embargo aún no conocemos de manera explicita a una función elíptica.
Presentaremos a una función elíptica de suma importancia dada por el matemático Karl Weierstrass:

Para presentar la función elíptica de Weierstrass utilizaremos una notación particular: Si $h : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, entonces la suma sobre todos los elementos del conjunto Ω de una función elíptica esta dada por:

$$\sum_{\omega \in \Omega} h(w).$$

Tenemos que $0 \in \Omega$, cuando no contamos al 0 pondremos:

$$\sum_{\omega \in \Omega}{}' h(w).$$

Contenido

Definición de $\wp$

Definición de $\wp$

Definición (Weierstrass 1862/1863)

Se define **la función $\wp$ de Weierstrass** como:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega}{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

Notaciones alternativas para $\wp$

Claramente $\wp$ depende del conjunto Ω que a su vez depende de una pareja de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, por lo que alternativamente se denota a $\wp$ como:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$$

Si por contexto queda claro cuáles son los periodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y el conjunto Ω usados, simplemente pondremos $\wp(z)$

Propiedades de $\wp$

Dado un conjunto Ω construido con un par de complejos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no colineales se tiene que:

Propiedades

i) La serie que define a $\wp$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Propiedades de $\wp$

Dado un conjunto Ω construido con un par de complejos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no colineales se tiene que:

Propiedades

i) La serie que define a $\wp$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

ii) La función $\wp$ de Weierstrass es una función par y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, además $ord(\wp, \Delta) = 2$

Propiedades de $\wp$

Dado un conjunto Ω construido con un par de complejos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no colineales se tiene que:

Propiedades

i) La serie que define a $\wp$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

ii) La función $\wp$ de Weierstrass es una función par y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, además $ord(\wp, \Delta) = 2$

iii) Los polos de $\wp$ están dados por el conjunto Ω, son todos de orden dos y además la parte principal de la expansión de Laurent alrededor de cada polo $z_j \in \Omega$ es:

$$\frac{1}{(z - z_j)^2}$$

La Derivada de $\wp$

Derivando a $\wp$ obtenemos que:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

y concluimos que:

Corolario

La función $\wp'$ es una función impar y elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y además $ord(\wp', \Delta) = 3$.

De nuevo Ω representa a todos los polos de $\wp'$, los cuales son todos de orden 3.

Los ceros de $\wp'$

Tenemos que ω_1, ω_2 y ω_3 son los medios periodos de $\wp$. Es fácil ver que:

$$\wp'(\omega_j) = 0 \ \forall \ j = 1, 2, 3$$

y como sabemos que $ord(\wp', \Delta) = 3$, entonces los medios periodos son los únicos ceros de $\wp'$ en Δ. Lo que implica que:

Teorema

$\wp'(z) = 0 \iff z \equiv \omega_j \pmod{\Omega}$, *con* $j = 1, 2, 3$.

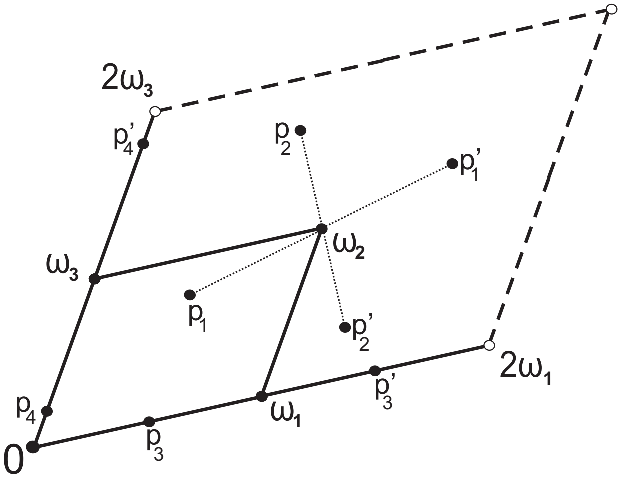
Los a-puntos de $\wp$

La importancia de los medios periodos ω_j es que son los ceros de $\wp'$, por lo tanto diremos que son los e_j-puntos de $\wp$, es decir definimos a e_j para $j = 1, 2, 3$ como:

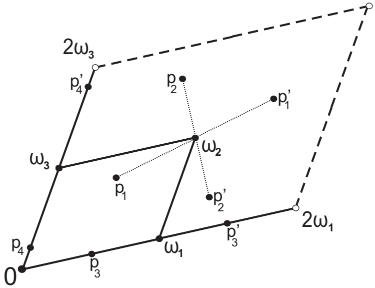
$$\wp(\omega_j) = e_j$$

y además como $\wp'(\omega_j) = 0$, entonces forzosamente cada ω_j es un e_j-punto doble para $\wp$.
Si ahora $a \neq e_1, e_2, e_3, \infty$, tendremos que los a-puntos serán todos de orden uno.

Teorema de simetría en Δ



Teorema de simetría en Δ



Corolario

Si restringimos el dominio de la función $\wp$ al paralelogramo con vértices en $0, \omega_1, \omega_2$ y ω_3, entonces $\wp$ es una función inyectiva y analítica en dicho paralelogramo excepto en el 0.

Contenido

Veremos dos casos particulares para la función $\wp$, en primer lugar cuando los medios periodos ω_1 y ω_3 están dados por:

$$\omega_1 = \alpha \quad \text{y} \quad \omega_3 = i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, es decir cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$.

Veremos dos casos particulares para la función $\wp$, en primer lugar cuando los medios periodos ω_1 y ω_3 están dados por:

$$\omega_1 = \alpha \quad \text{y} \quad \omega_3 = i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, es decir cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$.

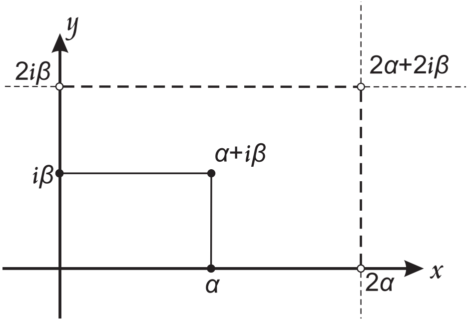
En segundo lugar tendremos que los medios periodos ω_1 y ω_3 están dados por:

$$\omega_1 = \alpha - i\beta \quad \text{y} \quad \omega_3 = \alpha + i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, es decir cuando $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$.

El Caso $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

En este caso es claro que Δ es un rectángulo:



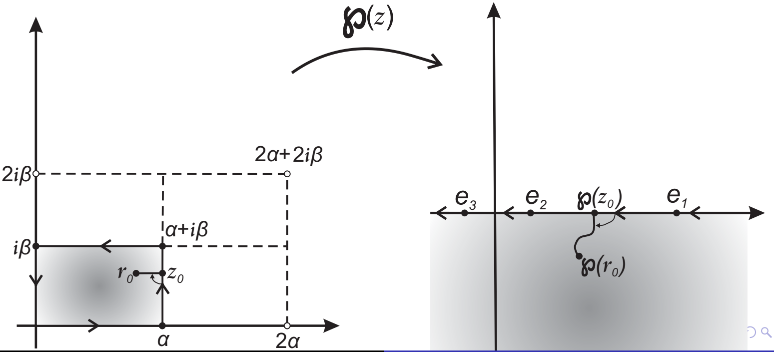
Lema

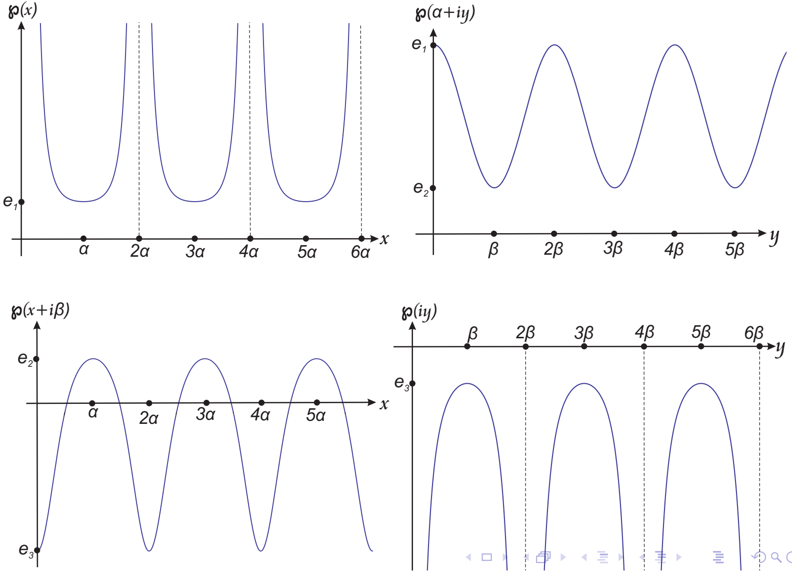
Si $z \in \{iy,\ \alpha + iy,\ x,\ x + i\beta\}$, *con* $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces* $\wp(z) \in \mathbb{R}$

El Mapeo Conforme de $\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$

Teorema

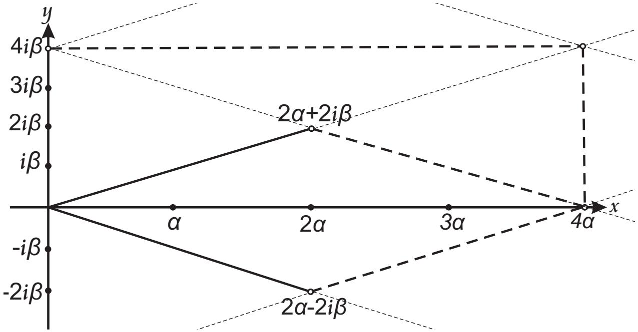
$\wp(z) = \wp(z|\alpha, i\beta)$ *mapea conformemente el interior del rectángulo (vértices en los medios periodos de* $\wp$*) sobre el semiplano inferior.*




℘(x)
e1
x
α
2α
3α
4α
5α
6α
℘(α+iy)
e1
e2
y
β
2β
3β
4β
5β
℘(x+iβ)
e2
e3
x
α
2α
3α
4α
5α
℘(iy)
e3
y
β
2β
3β
4β
5β
6β

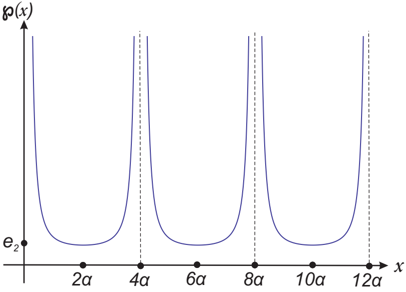
El Caso $\wp(z) = \wp(z|\alpha - i\beta, \alpha + i\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

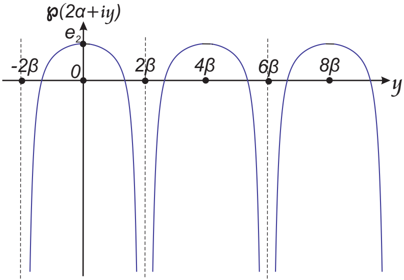
En este caso Δ esta representado por un rombo:



Lema

Si $z \in \{2\alpha + iy, x\}$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces* $\wp(z) \in \mathbb{R}$.


℘(x)
e2
2α
4α
6α
8α
10α
12α
x


℘(2α+iy)
e2
-2β
0
2β
4β
6β
8β
y

Contenido

Al inicio vimos que la función lemniscata es la inversa de una integral elíptica de primera especie, veremos que la función $\wp$ de Weierstrass es también la inversa de una integral elíptica. De hecho el nombre de funciones **elípticas** es debido a que dichas funciones fueron introducidas en las matemáticas al analizar la inversa de ciertas integrales elípticas.

Contenido

Series de Eisenstein

Definición

Definimos a **la serie de Eisenstein** asociada a Ω como:

$$G_n = \sum_{\omega \in \Omega}{}' \frac{1}{\omega^n} \; \forall \; n > 2$$

Se demuestra fácilmente que G_n es una serie que converge absoluta y uniformemente, además veremos que guarda una estrecha relación con la función $\wp(z|\Omega)$, de donde obtendremos que si $m > 2$ es un número impar entonces $G_m = 0$.

Serie de Laurent de $\wp$ y $\wp'$

Teorema

La serie de Laurent para las funciones $\wp$ y $\wp'$ en el anillo $A_{0,R}(0)$ con $0 < R < \min\{|\omega| : \omega \in \Omega \setminus \{0\}\}$ están dadas por:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2} \cdot z^{2n}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n)(2n+1)G_{2n+2} \cdot z^{2n-1}$$

donde G_n, la serie de Eisenstein, y las funciones $\wp$ y $\wp'$ se construyen con el conjunto Ω.

La Ecuación Diferencial para $\wp$

Teorema (La Ecuación Diferencial para la función $\wp$)

La función $\wp$ satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

donde $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$ son los **invariantes** *de la función $\wp$ asociada a Ω*

La Ecuación Diferencial para $\wp$

Teorema (La Ecuación Diferencial para la función $\wp$)

La función $\wp$ satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

donde $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$ son los **invariantes** *de la función $\wp$ asociada a Ω*

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2$$

La Ecuación Diferencial para $\wp$

Teorema (La Ecuación Diferencial para la función $\wp$)

La función $\wp$ satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

donde $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$ son los **invariantes** *de la función $\wp$ asociada a Ω*

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2$$

$$\wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z)$$

Contenido

$\wp^{-1}$ es una Integral Elíptica

Para un par de periodos fundamentales obtenemos:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega),$$

luego con Ω obtenemos a los invariantes g_2 y g_3, se deduce entonces que:

$$I(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

cumple que $I(\wp(z)) = z$, es decir que $I(y) = \wp^{-1}(y)$

¿Por qué el nombre de **invariantes**?

Teorema

Sean $g_{,,}, g_{,,,} \in \mathbb{R}$, *tales que* $g_{,,}^3 - 27g_{,,,}^2 \neq 0$, *entonces existen* $\omega_{,}, \omega_{,,,} \in \mathbb{C}$, *no colineales tales que la integral:*

$$I_{,}(y) = \int_{\infty}^{y} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_{,,}u - g_{,,,}}}$$

es la inversa de la función $\wp(z|\omega_{,}, \omega_{,,,})$.

Surge entonces una nueva notación:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \wp(z|g_2, g_3)$$

Contenido

Funciones Elípticas en términos de $\wp$ y $\wp'$

La importancia de la función $\wp$ para la clase de las funciones elípticas radica en el siguiente resultado:

Teorema

Sea f cualquier función elíptica con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, si $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$ entonces existen $R_1(u)$, $R_2(u)$ funciones racionales de una variable tal que:

$$f(z) = R_1\big(\wp(z)\big) + R_2\big(\wp(z)\big)\wp'(z)$$

Contenido

Definición

Se define a **la función ζ de Weierstrass** como:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Definición

Se define a **la función ζ de Weierstrass** como:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right]$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Se prueba que:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right) du$$

donde $\int_0^z$ denota la integral sobre una curva γ, que une al 0 con z sin pasar por puntos de Ω

Propiedades de ζ

La función ζ de Weierstrass satisface que:

i) $$\frac{d}{dz}\zeta(z) = -\wp(z)$$

ii) $$\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0$$

Propiedades de ζ

La función ζ de Weierstrass satisface que:

i) $\dfrac{d}{dz}\zeta(z) = -\wp(z)$

ii) $\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \dfrac{1}{z}\right) = 0$

La función ζ es impar y tiene un polo simple en z_j $\forall$ $z_j \in \Omega$, con parte principal alrededor de cada $z_j \in \Omega$ dada por:

$$\frac{1}{z - z_j}.$$

ζ es una función cuasi-periódica

Teorema

La función ζ de Weierstrass es una función **cuasi-periódica** *ya que:*

$$\zeta(z+2\omega_j)=\zeta(z)+2\eta_j \text{ para } j=1,2,3$$

donde las η_j satisfacen **las tres relaciones de Legendre***:*

$$2\omega_3\eta_1-2\omega_1\eta_3=\pi i \quad \text{(Primera relación de Legendre)}$$
$$2\omega_1\eta_2-2\omega_2\eta_1=-\pi i \quad \text{(Segunda relación de Legendre)}$$
$$2\omega_2\eta_3-2\omega_3\eta_2=-\pi i \quad \text{(Tercera relación de Legendre)}$$

Relación de ζ con cualquier Función Elíptica

Teorema

Sea f una función elíptica, con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Si $z_1, z_2, \cdots, z_r$ son los polos de f en Δ donde cada polo z_k tiene orden n_k, con parte principal:

$$\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \cdots + \frac{b_1^{(k)}}{(z-z_k)} \quad \textit{para } k = 1, 2, \cdots, r$$

entonces:

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^{r} \left[b_1^{(k)} \zeta(z-z_k) + \cdots + (-1)^{n_k-1} \frac{b_{n_k}^{(k)}}{(n_k-1)!} \zeta^{(n_k-1)}(z-z_k) \right]$$

donde C es una constante y $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega) = \zeta(z|\omega_1, \omega_3)$

Contenido

Definición

Se define a **la función σ de Weierstrass** como:

$$\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Omega}{}' \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right]\right)$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Definición

Se define a **la función $\boldsymbol{\sigma}$ de Weierstrass** como:

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega\in\Omega}{}' \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\sum_{\omega\in\Omega}{}' \left[\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right]\right)$$

donde Ω se construye con un par de periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Se prueba que:

$$\sigma(z) = z \exp\left(\int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du\right)$$

donde $\int_0^z$ denota la integral sobre una curva γ, que une al 0 con z sin pasar por puntos de Ω

Propiedades de σ

La función σ de Weierstrass satisface que:

i) $\dfrac{d}{dz}\ln(\sigma(z)) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$

ii) $\lim_{z\to 0}\left(\dfrac{\sigma(z)}{z}\right) = 1$

Propiedades de σ

La función σ de Weierstrass satisface que:

i) $$\frac{d}{dz}\ln(\sigma(z)) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

ii) $$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right) = 1$$

Teorema

La función σ de Weierstrass satisface que:

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)e^{2\eta_j(z+\omega_j)} \text{ para } j = 1,2,3$$

Propiedades de σ

La función σ de Weierstrass satisface que:

i) $\dfrac{d}{dz}\ln(\sigma(z)) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$

ii) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sigma(z)}{z}\right) = 1$

Teorema

La función σ de Weierstrass satisface que:

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)e^{2\eta_j(z+\omega_j)} \text{ para } j = 1, 2, 3$$

La función σ de Weierstrass es una función impar, entera y además tiene un cero en cada punto de Ω

Relación de σ con cualquier Función Elíptica

Teorema

Sea f una función elíptica tal que $ord(f, \Delta) = n$ y con periodos fundamentales $2\omega_1, 2\omega_3$. Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son los ceros de f en Δ (repitiendo cada cero tantas veces como su orden), y $b_1, b_2, \cdots, b_n$ son los polos de f en Δ (repitiendo cada polo tantas veces como su orden), entonces:

$$f(z) = C\frac{\sigma(z - a_1)\cdots\sigma(z - a_{n-1})\sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1)\cdots\sigma(z - b_{n-1})\sigma(z - b'_n)}$$

C una constante, $b'_n = (a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (b_1 + \cdots + b_{n-1})$ y $\sigma(z) = \sigma(z|\Omega) = \sigma(z|\omega_1, \omega_3)$

Contenido

Contenido

Definición Formal

Definición

Decimos que una función $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, satisface un **teorema de adición** si para cualesquiera $z, u \in G$, los valores $r = f(z), v = f(u)$ y $w = f(z+u)$ satisfacen una relación del tipo:

$$P(r, v, w) = 0$$

donde $P \in \mathbb{C}[r, v, w]$ es un polinomio en tres variables.

Ejemplos

Por ejemplo en el caso de la función *coseno* la bien conocida fórmula de adición de ángulos:

$$\cos(z+u) = \cos(z)\cos(u) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(u)$$

implica un teorema de adición dado por el polinomio:

$$P(r,v,w) = w^2 - 2rvw + r^2 + v^2 - 1$$

Ejemplos

Por ejemplo en el caso de la función *coseno* la bien conocida fórmula de adición de ángulos:

$$\cos(z+u) = \cos(z)\cos(u) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(u)$$

implica un teorema de adición dado por el polinomio:

$$P(r,v,w) = w^2 - 2rvw + r^2 + v^2 - 1$$

En el caso de la función φ_l tenemos que la fórmula:

$$\varphi_l(x+y) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + \varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1+\varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

se manipula algebraicamente para obtener el polinomio adecuado.

El caso de $\wp$

Parece ser entonces que las funciones periódicas se caracterizan por satisfacer un teorema de adición y el caso de las funciones elípticas no es una excepción, en particular para la función $\wp$ tenemos:

Teorema (Teorema de Adición para $\wp$)

La función $\wp$ de Weierstrass satisface que:

$$\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2$$

con $u \notin \Omega$

Se sigue también que:

Teorema (Fórmula de Duplicación para $\wp$)

La función $\wp$ de Weierstrass satisface que si $2z \notin \Omega$:

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z)$$

Otra fórmula que implica un teorema de adición para $\wp$ es:

Teorema

Sean $z, u \in \mathbb{C}$ tales que $z \not\equiv \pm u \pmod{\Omega}$, entonces la función $\wp$ de Weierstrass satisface la siguiente relación algebraica:

$$det\begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(z+u) & -\wp'(z+u) & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Contenido

Motivación

Hasta ahora hemos presentado tres notaciones distintas para la función $\wp$, dadas por:

$$\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|\omega_1, \omega_3) = \wp(z|g_2, g_3)$$

Es interesante ver el caso cuando los medios periodos o los invariantes se consideran como variables. Presentamos a continuación un par de resultados que dan los valores de las parciales de $\wp$ con respecto a los medios periodos y a los invariantes respectivamente.

Parciales de wp con respecto a ω_1 y ω_3

Teorema

Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ y $\wp(z) = \wp(z|\Omega)$, entonces si $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega)$ es la función cuasi-periódica de Weierstrass, tenemos que las parciales de $\wp$ en z con respecto a los medios periodos ω_1 y ω_3 están dadas por:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_1} \\ \\ \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial\omega_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ \\ \eta_1 & \eta_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -z\wp'(z) - 2\wp(z) \\ \\ -\zeta(z)\wp'(z) - 2\wp^2(z) + \frac{1}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

Parciales de $\wp$ con respecto a g_2 y g_3

Teorema

Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ *y* $\wp(z) = \wp(z|\Omega) = \wp(z|g_2, g_3)$, *entonces si* $\zeta(z) = \zeta(z|\Omega)$ *es la función cuasi-periódica de Weierstrass, tenemos que las parciales de* $\wp$ *en* z *con respecto a los invariantes* $g_2 = g_2(\Omega)$ *y* $g_3 = g_3(\Omega)$ *están dadas por:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_2} \\ \\ \dfrac{\partial\wp(z)}{\partial g_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4g_2 & 6g_3 \\ \\ 12g_3 & \frac{2}{3}g_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z\wp'(z) + 2\wp(z) \\ \\ 2\zeta(z)\wp'(z) + 4\wp^2(z) - \frac{2}{3}g_2 \end{pmatrix}$$

Contenido

Extensión de φ_l a $\mathbb{C}$

En un principio vimos a la función lemniscata $\varphi_l : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ como una función real y simplemente periódica, bajo la convención $\varphi_l(iy) = i\varphi_l(y)$ con $y \in \mathbb{R}$ y con el teorema de adición de φ_l extendemos el dominio de la función lemniscata a $\mathbb{C}$:

Definición

Definimos a **la función lemniscata en** $\mathbb{C}$ como la función de variable compleja dada por:

$$\varphi_l(z) = \frac{\varphi_l(x)\varphi_l'(y) + i\varphi_l(y)\varphi_l'(x)}{1 - \varphi_l^2(x)\varphi_l^2(y)}$$

para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

Propiedades de la Lemniscata Compleja

En primer lugar obtenemos un resultado de gran relevancia:

Teorema

La función lemniscata compleja es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, además el conjunto:

$$P_l = \left\{ (m+in)\frac{\varpi}{2} : m,n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ y son impares} \right\}$$

representa el conjunto de polos de dicha función.

Propiedades de la Lemniscata Compleja

En primer lugar obtenemos un resultado de gran relevancia:

Teorema

La función lemniscata compleja es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, además el conjunto:

$$P_l = \left\{ (m + in) \frac{\varpi}{2} : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ y son impares} \right\}$$

representa el conjunto de polos de dicha función.

Además se demuestra que algunas propiedades que satisface la función lemniscata real también se satisfacen por la lemniscata compleja, como por ejemplo la fórmula de adición o la ecuación diferencial

Contenido

Aplicación

Teorema (Abel 1826)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:

i) *Es posible construir la división en n partes iguales de la longitud de arco de lemniscata usando regla y compás.*

ii) $\varphi_l\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ *es construible.*

ii) n *es de la forma:*

$$n = 2^k p_1 \cdots p_s$$

con $k, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $p_1 \cdots p_s$ son distintos números primos de Fermat (es decir primos de la forma $p = 2^{2^m} + 1$ con $m \in \mathbb{N}$)

Notamos que el resultado anterior es el exacto análogo al de Gauss acerca de la división de la circunferencia.

Contenido

φ_l es una Función Elíptica

Ya sabemos que φ_l es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, además obtenemos que:

φ_l es una Función Elíptica

Ya sabemos que φ_l es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, además obtenemos que:

Teorema

La función lemniscata compleja es una función doblemente periódica con periodos fundamentales dados por:

$$2\omega_1 = (1-i)\varpi \quad y \quad 2\omega_3 = (1+i)\varpi$$

φ_l es una Función Elíptica

Ya sabemos que φ_l es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, además obtenemos que:

Teorema

La función lemniscata compleja es una función doblemente periódica con periodos fundamentales dados por:

$$2\omega_1 = (1-i)\varpi \quad y \quad 2\omega_3 = (1+i)\varpi$$

Luego entonces:

Corolario

La función lemniscata compleja es una función elíptica con periodos fundamentales $(1-i)\varpi$ *y* $(1+i)\varpi$

Polos, Periodos y Ceros de φ_l

Sabemos que los polos de la función elíptica φ_l, están dados por:

$$P_l = \left\{ (m+in)\frac{\varpi}{2} : m,n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ y son impares} \right\}$$

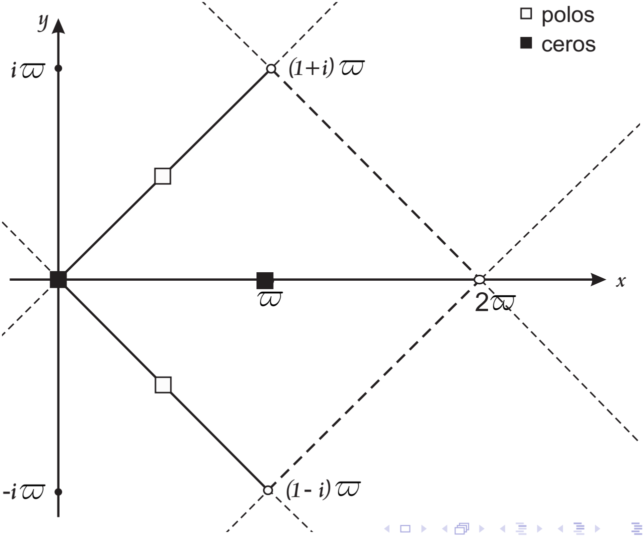
Además, el conjunto de periodos para φ_l es:

$$\Omega_l = \{m(1-i)\varpi + n(1+i)\varpi : m,n \in \mathbb{Z}\}$$

Se demuestra que los ceros de φ_l están dados por:

$$C_l = \{(m+in)\varpi : m,n \in \mathbb{Z}\}$$

Paralelogramo Fundamental Δ_l



Teorema Final

Lema

Sean $g_2(\Omega_l)$ *y* $g_3(\Omega_l)$ *los invariantes de la función* $\wp(z) = \wp(z|\Omega_l)$*, entonces:*

$$g_2(\Omega_l) = -1 \qquad g_3(\Omega_l) = 0$$

Teorema Final

Lema

Sean $g_2(\Omega_l)$ y $g_3(\Omega_l)$ los invariantes de la función $\wp(z) = \wp(z|\Omega_l)$, entonces:

$$g_2(\Omega_l) = -1 \qquad g_3(\Omega_l) = 0$$

Teorema

Sea $\wp(z) = \wp(z|\Omega_l)$, la función elíptica de Weierstrass con los mismos periodos fundamentales que φ_l (es decir $(1-i)\varpi$ y $(1+i)\varpi$) entonces:

$$\varphi_l(z) = -2\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} \quad y \quad \varphi_l'(z) = \frac{4\wp^2(z)-1}{4\wp^2(z)+1}$$

FIN

¡Muchas Gracias!