Cálculo Funcional

Alonso Delfín Ares de Parga

Dir. Enrique Ramírez de Arellano

CINVESTAV IPN

8 de agosto de 2016

Contenido

Contenido

Contenido

Álgebras de Banach

Definición

Un **álgebra** sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ (sobre $\mathbb{K}$) con multiplicación que lo vuelve anillo, en el cual

$$\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y,$$

para toda $x, y \in \mathcal{A}$ y toda $\lambda \in \mathbb{K}$. Es decir, para toda $x, y, z \in \mathcal{A}$ se cumple

i) $x(y+z) = xy + xz$ (**ley distributiva por la derecha**),
ii) $(x+y)z = xz + yz$ (**ley distributiva por la izquierda**),
iii) $x(yz) = (xy)z$ (**multiplicación asociativa**).

Nos interesa únicamente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en cuyo caso se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja.

Álgebras de Banach

Definición

Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ **tiene unidad** si hay **identidad multiplicativa** (**neutro multiplicativo**), el cual es denotado como $\mathbf{1}$, es decir que existe $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ tal que $x\mathbf{1} = \mathbf{1}x = x \;\; \forall \; x \in \mathcal{A}$

Álgebras de Banach

Definición

Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ **tiene unidad** si hay **identidad multiplicativa** (**neutro multiplicativo**), el cual es denotado como $\mathbf{1}$, es decir que existe $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ tal que $x\mathbf{1} = \mathbf{1}x = x \ \ \forall \ x \in \mathcal{A}$

Definición

Un **álgebra normada** es un álgebra $\mathcal{A}$ con una norma $\|\cdot\|$ para la cual se cumple la propiedad sub-multiplicativa:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{A}$$

Si además $\mathcal{A}$ tiene unidad $\mathbf{1}$, entonces la norma debe cumplir que $\|\mathbf{1}\| = 1$. Una álgebra normada completa con respecto a su norma es llamada **álgebra de Banach**; es **conmutativa** si la multiplicación lo es.

Álgebas de Banach

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff, entonces $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Álgebas de Banach

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff, entonces $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$.
- Sea $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ es un álgebra de Banach. La norma es $\|f\|_{L^\infty} := \sup\{c > 0 : \mu\{w \in \Omega : |f(w)| > c\} > 0\}$.

Álgebas de Banach

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff, entonces $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$.
- Sea $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ es un álgebra de Banach. La norma es $\|f\|_{L^\infty} := \sup\{c > 0 : \mu\{w \in \Omega : |f(w)| > c\} > 0\}$.
- Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ forma un álgebra de Banach con unidad dada por el operador identidad, $\mathbf{1} = \mathrm{I}$. La propiedad submultiplicativa se sigue de la definición de la norma en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$$\|\mathrm{T}\| := \sup_{\|x\|=1} \|\mathrm{T}x\|$$

Álgebras de Banach

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice **invertible** si existe un elemento $y \in \mathcal{A}$ tal que

$$xy = \mathbf{1} = yx.$$

Dicho elemento de denota por x^{-1}, se lee "el inverso de x". Denotamos al conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ como

$$\mathrm{GL}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : x \text{ es invertible } \}$$

Álgebras de Banach

Definición

i) El **espectro** de $x \in \mathcal{A}$ es

$$\sigma(x) := \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \mathbf{1} \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})\}.$$

ii) El **radio espectral** de x es

$$r(x) := \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

iii) El **conjunto resolvente** de x es

$$\rho(x) := \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Contenido

Álgebras C^*

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra-$*$ de Banach** si existe una transformación $x \mapsto x^* \in \mathcal{A}$ llamada **involución**, que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente

i) $x^{**} := (x^*)^* = x$

ii) $(xy)^* = y^* x^*$

iii) $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$

iv) $\|x^*\| = \|x\|$

si además

v) $\|xx^*\| = \|x\|^2$

entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra C***

Álgebras C^*

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra-$*$ de Banach** si existe una transformación $x \mapsto x^* \in \mathcal{A}$ llamada **involución**, que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente

i) $x^{**} := (x^*)^* = x$

ii) $(xy)^* = y^* x^*$

iii) $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$

iv) $\|x^*\| = \|x\|$

si además

v) $\|xx^*\| = \|x\|^2$

entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra C***

Álgebras C^*

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff. Entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra C^* con involución dada por $f \mapsto \overline{f}$.

Álgebras C^*

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff. Entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra C^* con involución dada por $f \mapsto \overline{f}$.
- El álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con la involución dada por la matriz transpuesta conjugada.

Álgebras C^*

Ejemplos

- Sea K compacto y de Hausdorff. Entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra C^* con involución dada por $f \mapsto \overline{f}$.
- El álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con la involución dada por la matriz transpuesta conjugada.
- Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, junto con la involución dada por el operador adjunto, es un álgebra C^*.

Álgebras C^*

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es un elemento **autoadjunto** si

$$x = x^*$$

Álgebras C^*

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es un elemento **autoadjunto** si

$$x = x^*$$

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es un elemento **normal** si

$$xx^* = x^*x$$

Contenido

Contenido

¿Qué es un cálculo funcional?

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$ fijo. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de funciones complejo valuadas definidas en un subconjunto de $\mathbb{C}$.

¿Qué es un cálculo funcional?

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$ fijo. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de funciones complejo valuadas definidas en un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ queremos definir a $f(x) \in \mathcal{A}$ de tal manera que la asignación

$$f \mapsto f(x)$$

sea un homomorfismo de álgebras.

¿Qué es un cálculo funcional?

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$ fijo. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de funciones complejo valuadas definidas en un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ queremos definir a $f(x) \in \mathcal{A}$ de tal manera que la asignación

$$f \mapsto f(x)$$

sea un homomorfismo de álgebras. La transformación $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ dada por $\Phi(f) := f(x)$, es lo que llamamos un **cálculo funcional para** x.

¿Qué es un cálculo funcional?

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$ fijo. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de funciones complejo valuadas definidas en un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ queremos definir a $f(x) \in \mathcal{A}$ de tal manera que la asignación

$$f \mapsto f(x)$$

sea un homomorfismo de álgebras. La transformación $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ dada por $\Phi(f) := f(x)$, es lo que llamamos un **cálculo funcional para** x.

- Si $f \equiv 1 \in \mathbb{C}$ entonces $f(x) = \mathbf{1} \in \mathcal{A}$
- Si $\imath(\lambda) = \lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\imath(x) = x \in \mathcal{A}$

¿Qué es un cálculo funcional?

El caso que más nos interesa es cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. En este caso los elementos de de $\mathcal{A}$ son operadores $(x = \mathrm{T})$ y la unidad es el operador identidad $(\mathbf{1} = \mathrm{I})$.

¿Qué es un cálculo funcional?

El caso que más nos interesa es cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. En este caso los elementos de de $\mathcal{A}$ son operadores ($x = \mathrm{T}$) y la unidad es el operador identidad ($\mathbf{1} = \mathrm{I}$).

En un cálculo funcional para un operador T es deseable que

$$\|f(\mathrm{T})\| \leq C\|f\|_\infty.$$

Pues así, si $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ converge a una $f \in \mathcal{F}$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$, entonces $(f_n(\mathrm{T}))_n \subset \mathcal{A}$ converge al operador $f(\mathrm{T})$ con respecto a $\|\cdot\|$.

Contenido

Cálculo Funcional Polinomial

- ¿Cómo elegir el álgebra de funciones $\mathcal{F}$?

Cálculo Funcional Polinomial

- ¿Cómo elegir el álgebra de funciones $\mathcal{F}$?
- ¿A qué elementos $x \in \mathcal{A}$ se les puede asociar un cálculo funcional?

Cálculo Funcional Polinomial

- ¿Cómo elegir el álgebra de funciones $\mathcal{F}$?
- ¿A qué elementos $x \in \mathcal{A}$ se les puede asociar un cálculo funcional?

R= Entre más grande sea el álgebra $\mathcal{F}$, menos elementos de $\mathcal{A}$ admiten un cálculo funcional y viceversa. Además dependiendo de $\mathcal{F}$ el álgebra $\mathcal{A}$ debe tener ciertas propiedades.

Cálculo Funcional Polinomial

- ¿Cómo elegir el álgebra de funciones $\mathcal{F}$?
- ¿A qué elementos $x \in \mathcal{A}$ se les puede asociar un cálculo funcional?

R= Entre más grande sea el álgebra $\mathcal{F}$, menos elementos de $\mathcal{A}$ admiten un cálculo funcional y viceversa. Además dependiendo de $\mathcal{F}$ el álgebra $\mathcal{A}$ debe tener ciertas propiedades.

Comencemos con el caso más conocido de un cálculo funcional, **el cálculo funcional polinomial**, en el cual tomamos a $\mathcal{F} = \mathbb{C}[\lambda]$, es decir, el álgebra de polinomios en $\mathbb{C}$ con la variable $\lambda \in \mathbb{C}$.

Cálculo Funcional Polinomial

El cálculo funcional polinomial se define para cualquier álgebra de Banach, sin embargo, para continuar con las aplicaciones y extensiones, pongamos de una vez $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach.

Cálculo Funcional Polinomial

El cálculo funcional polinomial se define para cualquier álgebra de Banach, sin embargo, para continuar con las aplicaciones y extensiones, pongamos de una vez $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach.

Tomemos a cualquier $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Sea $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ dado como

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Pongamos $\mathrm{T}^0 := \mathrm{I}$, por lo que podemos definir a $p(\mathrm{T}) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ como

$$p(\mathrm{T}) := \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{T}^k.$$

Cálculo Funcional Polinomial

La asignación $p \mapsto p(\mathrm{T})$, es el cálculo funcional polinomial para T.

Cálculo Funcional Polinomial

La asignación $p \mapsto p(\mathrm{T})$, es el cálculo funcional polinomial para T. En efecto es un homomorfismo de álgebras, pues se verifica de inmediato que si $p, q \in \mathbb{C}[\lambda]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\alpha p(\mathrm{T}) + q(\mathrm{T}) = (\alpha p + q)(\mathrm{T})$$
$$p(\mathrm{T})q(\mathrm{T}) = (pq)(\mathrm{T})$$

Cálculo Funcional Polinomial

La asignación $p \mapsto p(\mathrm{T})$, es el cálculo funcional polinomial para T. En efecto es un homomorfismo de álgebras, pues se verifica de inmediato que si $p, q \in \mathbb{C}[\lambda]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\alpha p(\mathrm{T}) + q(\mathrm{T}) = (\alpha p + q)(\mathrm{T})$$
$$p(\mathrm{T})q(\mathrm{T}) = (pq)(\mathrm{T})$$

Además, trivialmente si $p \equiv 1$, entonces $p(\mathrm{T}) = \mathrm{I}$, mientras que si $p(\lambda) = \lambda$, entonces $p(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

Cálculo Funcional Entero

El calculo funcional polinomial se extiende de manera natural para funciones enteras, pues si f es una función entera dada por

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C},$$

es intuitivo poner

$$f(\mathrm{T}) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{T}^k.$$

En cuyo caso se tiene que en efecto $f(\mathrm{T}) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, ya que

$$\|f(\mathrm{T})\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|\mathrm{T}\|^k < \infty.$$

En realidad, basta con que f sea una función holomorfa cuya serie de MacLaurin tenga radio de convergencia $R > \|\mathrm{T}\|$.

Contenido

Funciones de una Matriz

$$\mathcal{X} := \mathbb{C}^n$$

Funciones de una Matriz

$$\mathcal{X} := \mathbb{C}^n$$

$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$)

Funciones de una Matriz

$$\mathcal{X} := \mathbb{C}^n$$

$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$)

Gracias a las propiedades de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, podemos extender el cálculo funcional polinomial a una clase de funciones más grande.

Funciones de una Matriz

$$\mathcal{X} := \mathbb{C}^n$$

$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$)

Gracias a las propiedades de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, podemos extender el cálculo funcional polinomial a una clase de funciones más grande.

Tomemos una matriz $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sea

$$\sigma(\mathrm{T}) := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$$

el conjunto de los distintos eigenvalores de T.

Funciones de una Matriz

Gracias al álgebra lineal, sabemos que existe un polinomio ψ_{T}, llamado el polinomio mínimo de T. Dicho polinomio es el de grado mínimo que cumple que $\psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}) = 0$ y está dado como

$$\psi_{\mathrm{T}}(\lambda) := \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

donde $1 \leq m_j \leq \mathrm{mult}(\lambda_j)$ para cada $j \in \{1, \cdots, k\}$.

Funciones de una Matriz

Gracias al álgebra lineal, sabemos que existe un polinomio ψ_{T}, llamado el polinomio mínimo de T. Dicho polinomio es el de grado mínimo que cumple que $\psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}) = 0$ y está dado como

$$\psi_{\mathrm{T}}(\lambda) := \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

donde $1 \leq m_j \leq \mathrm{mult}(\lambda_j)$ para cada $j \in \{1, \cdots, k\}$.

Sea K un compacto con $\sigma(\mathrm{T}) \subset K$ y $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ con $\lambda \in K$. La matriz $p(\mathrm{T})$ está únicamente determinada por los valores

$$p(\lambda_j),\ p'(\lambda_j), \cdots,\ p^{(m_j-1)}(\lambda_j)\ \ \forall\ j \in \{1, \cdots, k\}.$$

Funciones de una Matriz

Sea f una función en $\mathcal{C}^M(K)$ con $M := \max_j m_j$. Existe un único polinomio de interpolación ℓ, de grado menor a $\sum_j m_j$, llamado el **polinomio de Lagrange-Sylvester**, tal que

$$\ell(\lambda_j) = f(\lambda_j),\ \ell'(\lambda_j) = f'(\lambda_j), \cdots,\ \ell^{(m_j-1)}(\lambda_j) = f^{(m_j-1)}(\lambda_j),$$

para toda $j \in \{1, \cdots, k\}$. Hay una formulación explicita para ℓ.

Funciones de una Matriz

Sea f una función en $\mathcal{C}^M(K)$ con $M := \max_j m_j$. Existe un único polinomio de interpolación ℓ, de grado menor a $\sum_j m_j$, llamado el **polinomio de Lagrange-Sylvester**, tal que

$$\ell(\lambda_j) = f(\lambda_j),\ \ell'(\lambda_j) = f'(\lambda_j), \cdots,\ \ell^{(m_j-1)}(\lambda_j) = f^{(m_j-1)}(\lambda_j),$$

para toda $j \in \{1, \cdots, k\}$. Hay una formulación explicita para ℓ.

Definimos el cálculo funcional en $\mathcal{C}^M(K)$, como sigue

$$f(\mathrm{T}) := \ell(\mathrm{T}).$$

Funciones de una Matriz (Ejemplo)

Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dada por

$$\mathrm{T} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que $\sigma(\mathrm{T}) = \{0\}$ y que $\psi_{\mathrm{T}}(z) = z^n$. Para $f \in \mathcal{C}^{n-1}(K)$ con $0 \in K$, se tiene que

$$\ell(\lambda) = f(0) + f'(0)\lambda + \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$$

Funciones de una Matriz (Ejemplo)

Por lo tanto

$$f(\mathrm{T}) = f(0)\mathrm{I} + f'(0)\mathrm{T} + \frac{f''(0)}{2!}\mathrm{T}^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\mathrm{T}^{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} f(0) & f'(0) & \frac{f''(0)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(0) & f'(0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(0) \end{bmatrix}$$

Funciones de una Matriz (Propiedades)

Proposición

Sean $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *una matriz con* $\sigma(\mathrm{T}) \subset K$ *y* $f \in \mathcal{C}^M(K)$, *entonces se cumplen los siguientes incisos*

1) *Sea* $\mathrm{S} := \mathrm{P}^{-1}\mathrm{T}\mathrm{P}$, *entonces* $f(\mathrm{S}) = \mathrm{P}^{-1}f(\mathrm{T})\mathrm{P}$
2) *Si* $\mathrm{T} = \mathrm{diag}[\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_j]$ *es diagonal a bloques entonces* $f(\mathrm{T}) = \mathrm{diag}[f(\mathrm{T}_1), \cdots, f(\mathrm{T}_j)]$

Funciones de una Matriz (Propiedades)

Si

$$\Lambda := \operatorname{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Funciones de una Matriz (Propiedades)

Si

$$\Lambda := \operatorname{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

entonces, si f está bien definida en el espectro $\sigma(\Lambda) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, se tiene

$$f(\Lambda) = \operatorname{diag}[f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)] = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Funciones de una Matriz (Propiedades)

Si $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\Lambda\mathrm{P}$ entonces $f(\mathrm{T}) = \mathrm{P}^{-1}f(\Lambda)\mathrm{P}$. Notamos que para cualquier $z \in \mathbb{C}^n$

$$f(\Lambda)z = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1)z_1 \\ \vdots \\ f(\lambda_n)z_n \end{bmatrix}$$

Funciones de una Matriz (Propiedades)

Si $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\Lambda\mathrm{P}$ entonces $f(\mathrm{T}) = \mathrm{P}^{-1}f(\Lambda)\mathrm{P}$. Notamos que para cualquier $z \in \mathbb{C}^n$

$$f(\Lambda)z = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1)z_1 \\ \vdots \\ f(\lambda_n)z_n \end{bmatrix}$$

Decimos que la matriz $f(\mathrm{T})$ es equivalente a la matriz $f(\Lambda)$, que es la matriz de multiplicación por la función f en $\sigma(\mathrm{T})$.

La Fórmula de Sylvester

Teorema

Sea T *una matriz diagonalizable y* $f \in \mathcal{C}(\mathrm{K})$ *de tal forma que* $\sigma(\mathrm{T}) := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\} \subset K$*. Entonces*

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\mathrm{P}_j$$

donde cada P_j *está dada como*

$$\mathrm{P}_j := \prod_{i \neq j}^{k} \left(\frac{\mathrm{T} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$$

La Fórmula de Sylvester

Observación

- Notemos que $\mathrm{P}_j^2 = \mathrm{P}_j$ y que $\mathrm{P}_j\mathrm{P}_i = 0$ para $i \neq j$. En realidad cada P_j es la matriz proyección al eigenespacio generado por λ_j.

La Fórmula de Sylvester

Observación

- Notemos que $\mathrm{P}_j^2 = \mathrm{P}_j$ y que $\mathrm{P}_j\mathrm{P}_i = 0$ para $i \neq j$. En realidad cada P_j es la matriz proyección al eigenespacio generado por λ_j.
- Existe una función $\mathcal{P} : \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{T})) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, (que pronto llamaremos medida espectral) que cumple que $\mathcal{P}(\{\lambda_j\}) = \mathrm{P}_j$ de tal forma que la fórmula de Sylvester se expresa como

$$f(\mathrm{T}) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}$$

donde la integral anterior es una integral espectral, cuya teoría surge de la teoría de integración de Lebesgue y la veremos más adelante.

Contenido

Exponencial de una Matriz

Consideremos la exponencial de una matriz $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Gracias a la extensión del cálculo funcional polinomial para funciones enteras sabemos que

$$\exp(\mathrm{T}) = e^{\mathrm{T}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathrm{T}^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Teorema

Sean $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y consideremos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales dado por*

$$x'(t) = \mathrm{A}x(t)$$
$$x(0) = x_0.$$

Entonces la solución del sistema es $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *definida como* $x(t) := e^{\mathrm{A}t}x_0$.

Contenido

Idea

Queremos extender al cálculo funcional polinomial a funciones continuas f sobre cierto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Gracias al teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|p_n - f\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Idea

Queremos extender al cálculo funcional polinomial a funciones continuas f sobre cierto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Gracias al teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|p_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si x es un elemento de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es intuitivo intentar definir

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

Idea

Queremos extender al cálculo funcional polinomial a funciones continuas f sobre cierto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Gracias al teorema de Stone-Weierstrass existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|p_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Si x es un elemento de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es intuitivo intentar definir

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

Sin embargo el límite anterior no tiene por que existir en $\mathcal{A}$. Pondremos fuertes restricciones sobre el álgebra $\mathcal{A}$, el elemento x y el compacto K para poder llevar acabo, en cierto modo, la idea anterior.

Contenido

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Proposición

Sea $x \in \mathcal{A}$ *entonces* $r(x) \leq \|x\|$ *y más aún* $\sigma(x)$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$*.*

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Proposición

Sea $x \in \mathcal{A}$ entonces $r(x) \leq \|x\|$ y más aún $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

El siguiente Teorema se debe a Gelfand

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces se tiene que para cualquier $x \in \mathcal{A}$

$$\sigma(x) \neq \emptyset$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Definición

Un **homomorfismo** en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un funcional lineal $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que preserva multiplicación, es decir

$$\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{A}.$$

El conjunto de homomorfismos en $\mathcal{A}$ es denotado por $\mathrm{hom}(\mathcal{A})$.

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Se define el **espectro de Gelfand** como

$$\mathrm{sp}(\mathcal{A}) := \{\omega \in \mathrm{hom}(\mathcal{A}) : \omega \neq 0\} \subset \mathcal{A}^*$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

- Para toda $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ se tiene que $\|\omega\| = 1$.
- El conjunto $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es compacto en $\mathcal{A}^*$, con respecto a la topología débil-$*$.

Preliminares para el cálculo funcional continuo

- Para toda $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ se tiene que $\|\omega\| = 1$.
- El conjunto $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es compacto en $\mathcal{A}^*$, con respecto a la topología débil-$*$.

Definición

Para un $x \in \mathcal{A}$, se define el **mapeo de Gelfand** como $x \mapsto \widehat{x} \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$ donde la función continua $\widehat{x}$ está dada por

$$\widehat{x}(\omega) := \omega(x) \;\; \forall\, \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

- Para toda $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ se tiene que $\|\omega\| = 1$.
- El conjunto $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es compacto en $\mathcal{A}^*$, con respecto a la topología débil-$*$.

Definición

Para un $x \in \mathcal{A}$, se define el **mapeo de Gelfand** como $x \mapsto \widehat{x} \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$ donde la función continua $\widehat{x}$ está dada por

$$\widehat{x}(\omega) := \omega(x) \quad \forall\ \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$$

$$\widehat{x + \lambda y} = \widehat{x} + \lambda\ \widehat{y}, \qquad \widehat{xy} = \widehat{x}\ \widehat{y}, \qquad \widehat{\mathbf{1}} = 1.$$

El mapeo de Gelfand es un homomorfismo a una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$.

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\sigma(x) = \{\widehat{x}(\omega) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})\} =: \widehat{x}\left(\mathrm{sp}(\mathcal{A})\right).$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\sigma(x) = \{\widehat{x}(\omega) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})\} =: \widehat{x}\,(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))\,.$$

Es por si mismo muy interesante, pues calcula el espectro de un elemento como la imagen de su mapeo de Gelfand.

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\sigma(x) = \{\widehat{x}(\omega) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})\} =: \widehat{x}\,(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))\,.$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema es la base para la construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\sigma(x) = \{\widehat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})\} =: \widehat{x}\left(\operatorname{sp}(\mathcal{A})\right).$$

Es por si mismo muy interesante, pues calcula el espectro de un elemento como la imagen de su mapeo de Gelfand.

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Definición

Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ dos álgebras-$*$ de Banach con involuciones $*_1$, $*_2$ respectivamente. Un isomorfismo $\theta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se llama **isomorfismo**-$*$ entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ si para toda $x \in \mathcal{A}_1$

$$\theta\left(x^{*_1}\right) = \left(\theta(x)\right)^{*_2}$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

El siguiente teorema recibe el nombre de Teorema espectral abstracto

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad. Entonces el mapeo de Gelfand es un isomorfismo-$*$ isométrico de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$.

Demostración.

(Sólo la isometría:)

$$\begin{aligned} \|x\| = \cdots = r(x) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \\ &= \sup\{|\widehat{x}(\omega)| : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})\} = \|\widehat{x}\|_\infty \end{aligned}$$

∎

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Del Teorema anterior se desprenden dos corolarios de gran importancia, que además no requieren conmutatividad:

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Del Teorema anterior se desprenden dos corolarios de gran importancia, que además no requieren conmutatividad:

Corolario

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad. Entonces si $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto se tiene que

$$\sigma(x) \subset \mathbb{R}$$

Preliminares para el cálculo funcional continuo

Del Teorema anterior se desprenden dos corolarios de gran importancia, que además no requieren conmutatividad:

Corolario

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad. Entonces si $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto se tiene que

$$\sigma(x) \subset \mathbb{R}$$

Corolario

(Permanencia Espectral: "Baby Spectral Theorem") Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad. Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ es una subálgebra C^* de $\mathcal{A}$ que contiene la unidad, entonces para todo $x \in \mathcal{A}_1$

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$$

Contenido

Construcción del cálculo funcional continuo

Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $S \subset \mathcal{A}$. La intersección de todas las álgebras C^* que contienen a S se llama el **álgebra** C^* **generada por** S y se denota por $C^*(S)$, es decir

$$C^*(S) := \bigcap \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es álgebra } C^* \text{ con } S \subset \mathcal{V}\}$$

Construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* unitaria y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces existe un único isomorfismo-$*$ isométrico $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ que cumple que $\Phi(\imath) = x$, donde $\imath : \sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la función inclusión: $\imath(\lambda) := \lambda$ para $\lambda \in \sigma(x)$.

Construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* unitaria y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces existe un único isomorfismo-$*$ isométrico $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ que cumple que $\Phi(\imath) = x$, donde $\imath : \sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la función inclusión: $\imath(\lambda) := \lambda$ para $\lambda \in \sigma(x)$.

- Es claro que $\imath \in \mathcal{C}(\sigma(x))$

Construcción del cálculo funcional continuo

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* unitaria y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces existe un único isomorfismo-$*$ isométrico $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ que cumple que $\Phi(\imath) = x$, donde $\imath : \sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la función inclusión: $\imath(\lambda) := \lambda$ para $\lambda \in \sigma(x)$.

- Es claro que $\imath \in \mathcal{C}(\sigma(x))$
- Φ es el homomorfismo de álgebras que da lugar al cálculo funcional continuo, por lo que para cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$, ponemos

$$f(x) := \Phi(f)$$

Demostración.

(Idea:) Consideremos los conjuntos

$$A_1 := \left\{ \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, x^j (x^*)^k : n \in \mathbb{N}\ ;\ c_{j,k} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{A}$$

$$A_2 := \left\{ \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \lambda^j\ (\overline{\lambda})^k :\ n \in \mathbb{N}\ ;\ c_{j,k} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{C}(\sigma(x))$$

Sean $\mathcal{A}_1 := \overline{A_1}$ y $\mathcal{A}_2 := \overline{A_2}$. Vemos que $\mathcal{A}_1 = C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ y que es un álgebra conmutativa. Por el Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}(\sigma(x))$. Proponemos $\theta : \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1) \to \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ como

$$\theta(\omega) := \omega(x) \in \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$$

Demostración.

Se verifica que $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ y $\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ son homeomorfos bajo θ, por lo que si definimos $\Psi : \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)) \to \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x))$ por $\Psi(f) := f \circ \theta^{-1}$, así $\Psi^{-1}(g) = g \circ \theta$ para $g \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x))$, entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[r, "x \mapsto \widehat{x}"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)) \arrow[d, "\Psi"] \\
& \mathcal{C}\left(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)\right)
\end{tikzcd}$$

Con $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}\left(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)\right) = \mathcal{A}_2$, dado por $\phi(a) := \widehat{a} \circ \theta^{-1}$ para $a \in \mathcal{A}_1$

Demostración.

El isomorfismo-$*$ isométrico buscado es $\Phi := \phi^{-1} : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$, pues si para $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1))$, el mapeo $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_1$ representa la inversa del mapeo de Gelfand, entonces

$$\Phi(\imath) = \widetilde{\Psi^{-1}(\imath)} = \widetilde{\imath \circ \theta} = \widetilde{\theta} = x,$$

ya que como $\theta(\omega) = \omega(x)$ entonces $\widetilde{\theta} = x$ ∎

Propiedades del cálculo funcional continuo

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Recordemos que $f(x) := \Phi(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

Propiedades del cálculo funcional continuo

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Recordemos que $f(x) := \Phi(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

- $\|f(x)\| = \|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$

Propiedades del cálculo funcional continuo

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Recordemos que $f(x) := \Phi(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

- $\|f(x)\| = \|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$
- $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$

Propiedades del cálculo funcional continuo

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Recordemos que $f(x) := \Phi(f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

- $\|f(x)\| = \|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$
- $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(x)))$.

Aplicaciones directas del cálculo funcional continuo

Retomemos el caso en que el álgebra C^* de interés es $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Lema

Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *un operador normal (i.e.* $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^*$*) y* $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$*. Entonces existe una sucesión* $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *de elementos con norma* 1*, tal que*

$$(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})\xi_n \to 0 \in \mathcal{H}$$

Aplicaciones directas del cálculo funcional continuo

Retomemos el caso en que el álgebra C^* de interés es $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Lema

Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *un operador normal (i.e.* $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^*$*) y* $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$*. Entonces existe una sucesión* $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *de elementos con norma* 1*, tal que*

$$(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})\xi_n \to 0 \in \mathcal{H}$$

Teorema

Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *un operador compacto y normal. Entonces todo elemento no nulo del espectro, i.e. de* $\sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$*, es eigenvalor. Además no hay puntos de acumulación en* $\sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$*.*

Contenido

Contenido

Matrices Diagonalizables

Consideremos el álgebra C^* dada por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con involución dada por la matriz transpuesta conjugada, si T es una matriz normal, entonces existe una matriz unitaria U (i.e. $\mathrm{U}^*\mathrm{U} = \mathrm{U}\mathrm{U}^* = \mathrm{I}$) y una matriz diagonal $\Lambda := \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ tal que

$$\mathrm{T} = \mathrm{U}\Lambda\mathrm{U}^*$$

Esto quiere decir que el operador T es diagonalizable pues es equivalente a la matriz diagonal Λ que actúa como una matriz de multiplicación.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega, \mu)$, como sigue

$$\left(\mathrm{M}_f g\right)(w) := f(w)g(w), \ \forall\ g \in L^2(\Omega, \mu), \ \forall\ w \in \Omega.$$

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega, \mu)$, como sigue

$$(\mathrm{M}_f g)(w) := f(w)g(w), \ \forall \ g \in L^2(\Omega, \mu), \ \forall \ w \in \Omega.$$

- $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega, \mu)$, como sigue

$$(\mathrm{M}_f g)(w) := f(w)g(w), \ \forall \ g \in L^2(\Omega, \mu), \ \forall \ w \in \Omega.$$

- $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$.
- M_f es lineal, acotado y normal.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega,\mu) := (\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega,\mu)$, como sigue

$$(\mathrm{M}_f g)(w) := f(w)g(w),\ \forall\, g \in L^2(\Omega,\mu),\ \forall\, w \in \Omega.$$

- $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega,\mu) \to L^2(\Omega,\mu)$.
- M_f es lineal, acotado y normal.
- $\mathrm{M}_{f_1+f_2} = \mathrm{M}_{f_1} + \mathrm{M}_{f_2}$.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega, \mu)$, como sigue

$$(\mathrm{M}_f g)(w) := f(w)g(w),\ \forall\, g \in L^2(\Omega, \mu),\ \forall\, w \in \Omega.$$

- $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$.
- M_f es lineal, acotado y normal.
- $\mathrm{M}_{f_1+f_2} = \mathrm{M}_{f_1} + \mathrm{M}_{f_2}$.
- $\|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_{L^\infty}$.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida σ-finita. Dado $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definimos **el operador de multiplicación** M_f en $L^2(\Omega, \mu)$, como sigue

$$(\mathrm{M}_f g)(w) := f(w)g(w), \ \forall\, g \in L^2(\Omega, \mu), \ \forall\, w \in \Omega.$$

- $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$.
- M_f es lineal, acotado y normal.
- $\mathrm{M}_{f_1+f_2} = \mathrm{M}_{f_1} + \mathrm{M}_{f_2}$.
- $\|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_{L^\infty}$.
- $\sigma(\mathrm{M}_f) = \overline{f(\Omega)}$.

Operadores Diagonalizables

Definición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Decimos que T es **diagonalizable** si existen

1) Un espacio $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ con medida σ-finita y tal que $L^2(\Omega, \mu)$ es separable;
2) Una función $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$;
3) Un operador unitario $\mathrm{U} : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$,

tal que

$$\mathrm{UM}_f = \mathrm{TU}$$

con $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$ el operador de multiplicación por f. Es decir, se tiene que T es equivalente al operador de multiplicación en el sentido que $\mathrm{T} = \mathrm{UM}_f\mathrm{U}^*$.

Primer Teorema Espectral

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces T es diagonalizable.

Primer Teorema Espectral

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces T es diagonalizable.

Notemos que si T es diagonalizable, entonces podemos calcular su espectro como sigue

$$\sigma(\mathrm{T}) = \sigma(\mathrm{U}\mathrm{M}_f\mathrm{U}^*) = \sigma(\mathrm{M}_f) = \overline{f(\Omega)}$$

Primer Teorema Espectral

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces T es diagonalizable.

Demostración.

(Uso del cálculo funcional continuo) Sea $\mathcal{A} := C^*(\{\mathrm{I}, \mathrm{T}\})$. El primer teorema espectral se reduce, de manera no trivial, a demostrarlo cuando $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{A}\xi}$ para algún $\xi \in \mathcal{H}$. Se define $\varphi : \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T})) \to \mathbb{C}$ como

$$\varphi(f) := \langle f(\mathrm{T})\xi, \xi \rangle.$$

Se verifica que φ es un funcional lineal y positivo.

Primer Teorema Espectral

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces T es diagonalizable.

Demostración.

Entonces por el Teorema de representación de Riesz-Markov existe una medida de Borel regular μ, en $\sigma(\mathrm{T})$, tal que

$$\varphi(f) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Si $\mathrm{U} : \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T})) \to \mathcal{A}\xi$ está dado por $\mathrm{U}f := f(\mathrm{T})\xi$, se verifica que U es unitario y se extiende por densidad a todo $L^2(\sigma(\mathrm{T}), \mu)$. Vemos que para toda $f \in \sigma(\mathrm{T})$, $\mathrm{UM}_f = f(\mathrm{T})\mathrm{U}$ en $L^2(\sigma(\mathrm{T}), \mu)$. Finalmente el resultado se sigue tomando $f := \imath$. ∎

Contenido

Preliminares y notación

Definición

Un operador $\mathrm{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es llamado **proyección** si es autoadjunto e idempotente, i.e. $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P} = \mathrm{P}^*$.

Definición

Un operador $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es **positivo** si para toda $x \in \mathcal{H}$ se cumple que $\langle \mathrm{T}x, x \rangle \geq 0$ y se denota por $\mathrm{T} \geq 0$. Por supuesto escribimos $\mathrm{T} \leq \mathrm{L}$ siempre que $\mathrm{L} - \mathrm{T} \geq 0$.

Medidas Espectrales

Definición

Sea Ω un espacio compacto de Haussdorff, $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\Omega)$ los borelianos de Ω y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una **medida espectral** en $(\Omega, \mathcal{H})$ es una función $\mathcal{P} : \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

i) El operador $\mathcal{P}(E)$ es una proyección para toda $E \in \mathfrak{B}$;

ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$, $\mathcal{P}(\Omega) = \mathrm{I}$;

iii) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B}$ es una sucesión disjunta de conjuntos, entonces

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_n)$$

iv) Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$ las funciones $\mathcal{P}_{x,y} : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ dadas por $\mathcal{P}_{x,y}(E) := \langle \mathcal{P}(E)x, y \rangle$ son medidas complejo valuadas y regulares en $(\Omega, \mathfrak{B})$.

Propiedades de las Medidas Espectrales

Sea $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$.

Propiedades de las Medidas Espectrales

Sea $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$.

- Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$.

Propiedades de las Medidas Espectrales

Sea $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$.

- Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$.
- Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \cap F = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(E) \perp \mathcal{P}(F)$.

Propiedades de las Medidas Espectrales

Sea $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$.

- Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$.
- Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \cap F = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(E) \perp \mathcal{P}(F)$.
- Para todos $E, F \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F)$

Notación

Definición

$\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ es el álgebra C^* de todas las funciones complejo valuadas, medibles en $(\Omega, \mathfrak{B})$ y acotadas. Aquí la norma es la del supremo y la involución está dada por el conjugado complejo $f \mapsto \overline{f}$.
Claramente si Ω es compacto $\mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{B}^\infty(\Omega)$.

Hacia el Teorema Espectral

Teorema

Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$. Entonces para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ existe un único $\mathrm{T}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que para toda $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle \mathrm{T}_f x, y\rangle = \int_\Omega f \; \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$$

Hacia el Teorema Espectral

Teorema

Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$. Entonces para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ existe un único $\mathrm{T}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que para toda $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle \mathrm{T}_f x, y \rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$$

Observación

El operador T_f, se llama **la integral espectral de f con respecto a $\mathcal{P}$** y se denota por

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P} := \mathrm{T}_f.$$

Para cualquier $E \in \mathfrak{B}$, $\int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, ya que $\langle \mathcal{P}(E)x, y \rangle = \mathcal{P}_{x,y}(E) = \int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$.

Segundo Teorema Espectral

Teorema

Sea Ω *un espacio compacto de Hausdorff,* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Tomemos a* $\theta : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *cualquier homomorfismo-*$*$ *que cumpla que* $\theta(1) = \mathrm{I}$*. Entonces existe una única medida espectral* $\mathcal{P}$ *en* $(\Omega, \mathcal{H})$*, tal que para toda* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\theta(f) = \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}.$$

Segundo Teorema Espectral

Teorema

Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Tomemos a $\theta : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cualquier homomorfismo-$*$ que cumpla que $\theta(1) = \mathrm{I}$. Entonces existe una única medida espectral $\mathcal{P}$ en $(\Omega, \mathcal{H})$, tal que para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\theta(f) = \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}.$$

Corolario

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe una única medida espectral $\mathcal{P}$ en $(\sigma(\mathrm{T}), \mathcal{H})$, tal que

$$\mathrm{T} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P}$$

Cálculo Funcional Boreliano

A la medida espectral $\mathcal{P}$ del Teorema anterior se le conoce como la **resolución de la identidad** del operador normal T. Además podemos definir $f(\mathrm{T})$ como

$$f(\mathrm{T}) := \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}$$

para toda $f \in \mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$, extendiendo así el cálculo funcional continuo a todo $\mathcal{B}^{\infty}(\Omega)$. El homomorfismo-$*$, $f \mapsto f(\mathrm{T})$ de $\mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es llamado **el cálculo funcional boreliano o medible** del operador T.

Propiedades del cálculo funcional Boreliano

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $f \in \mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$

Propiedades del cálculo funcional Boreliano

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $f \in \mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$

- Es importante notar que no sabemos si el cálculo funcional boreliano es una isometría, sin embargo si sabemos que

$$\|f(\mathrm{T})\| = \left\| \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \ \mathrm{d}\mathcal{P} \right\| \leq \|f\|_{\infty}.$$

Propiedades del cálculo funcional Boreliano

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $f \in \mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$

- Es importante notar que no sabemos si el cálculo funcional boreliano es una isometría, sin embargo si sabemos que

$$\|f(\mathrm{T})\| = \left\| \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \ \mathrm{d}\mathcal{P} \right\| \leq \|f\|_{\infty}.$$

- $\sigma(f(\mathrm{T})) \subset f(\sigma(\mathrm{T}))$

Propiedades del cálculo funcional Boreliano

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $f \in \mathcal{B}^{\infty}(\sigma(\mathrm{T}))$

- Es importante notar que no sabemos si el cálculo funcional boreliano es una isometría, sin embargo si sabemos que

$$\|f(\mathrm{T})\| = \left\| \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right\| \leq \|f\|_{\infty}.$$

- $\sigma(f(\mathrm{T})) \subset f(\sigma(\mathrm{T}))$
- Para $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(\mathrm{T})))$ se cumple que $(g \circ f)(\mathrm{T}) = g(f(\mathrm{T}))$

Aplicaciones del cálculo funcional Boreliano

Caracterización de los eigenvalores de un operador normal:

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con resolución de la identidad $\mathcal{P}$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma(\mathrm{T})$ es un eigenvalor si y sólo si $\mathcal{P}(\{\lambda_0\}) \neq 0$.

Aplicaciones del cálculo funcional Boreliano

Caracterización de los operadores unitarios:

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador normal $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es unitario si y sólo si

$$\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Aplicaciones del cálculo funcional Boreliano

Caracterización de los operadores unitarios:

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador normal $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es unitario si y sólo si*

$$\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Teorema

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $\mathrm{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es unitario si y sólo si*

$$\mathrm{U} = e^{i\ \mathrm{T}}$$

para algún operador autoadjunto $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Definición

Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial normado, Decimos que $\mathcal{Y}$ es un **subespacio invariante bajo un operador** $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ si:

i) $\mathcal{Y}$ es un subespacio vectorial no vacío contenido en $\mathcal{X}$.

ii) $\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{X}$.

iii) $\mathrm{T}(\mathcal{Y}) := \{\mathrm{T}y : y \in \mathcal{Y}\} \subset \mathcal{Y}$.

Si además $\mathcal{Y} \neq \{0\}$ y $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$ decimos que $\mathcal{Y}$ es un **subespacio invariante no trivial de** T.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que consiste únicamente de los operadores unitarios.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que consiste únicamente de los operadores unitarios.

Definición

Sea G un grupo y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una **representación unitaria** de G en $\mathcal{H}$ es un homomorfismo $T : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Para cada $g \in G$, $T(g)$ es un operador unitario, el cual denotamos como $\mathrm{T}_g \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, es decir $\mathrm{T}_g := T(g)$. Decimos que T es una representación unitaria **irreducible** de G, si para cada $g \in G$ los únicos subespacios invariantes bajo T_g son los triviales.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Definición

Sea T una representación unitaria de G. Definimos **el álgebra conmutante de** T como

$$\mathtt{C}(T) := \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{T}_g\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{T}_g \ \forall\ g \in G\}.$$

Es claro que siempre $\mathrm{I} \in \mathtt{C}(T)$.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Definición

Sea T una representación unitaria de G. Definimos **el álgebra conmutante de** T como

$$\mathtt{C}(T) := \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{T}_g\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{T}_g \ \forall \ g \in G\}.$$

Es claro que siempre $\mathrm{I} \in \mathtt{C}(T)$.

Teorema

Una representación unitaria T del grupo G es irreducible si y sólo si para todo operador $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ existe un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{A} = \lambda_0\mathrm{I}$.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Teorema

Una representación unitaria T del grupo G es irreducible si y sólo si para todo operador $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ existe un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{A} = \lambda_0 \mathrm{I}$.

Demostración.

$(\Longrightarrow)$: El caso general se sigue de demostrar primero para $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ autoadjunto. Sea $\mathcal{P}$ la resolución de la identidad de A, se verifica que $\mathcal{P}(E) \in \mathtt{C}(T)$ para todo $E \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{A}))$.

Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(\mathrm{A}) = \{t_0\}$, ya que de lo contrario $\sigma(\mathrm{A}) = E_1 \cup E_2$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $E_1, E_2 \neq \emptyset$; si ponemos $\mathrm{P}_j := \mathcal{P}(E_j)$ (para $j = 1, 2$), entonces $\mathrm{P}_j \neq 0$ y $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathcal{P}(\emptyset) = 0$.

Aplicación : Teoría de Representación de Grupos

Teorema

Una representación unitaria T del grupo G es irreducible si y sólo si para todo operador $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ existe un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{A} = \lambda_0 \mathrm{I}$.

Demostración.

Definimos ahora

$$\mathcal{Y} := \{x \in \mathcal{H} : \mathrm{P}_1 x = 0\}$$

$\mathcal{Y}$ es cerrado, $\mathcal{Y} \neq \{0\}$ y $\mathcal{Y} \neq \mathcal{H}$. Sin embargo $\mathcal{Y}$ es un subespacio invariante no trivial bajo cada T_g, contradiciendo así la irreductibilidad de T. ■

Contenido

Idea

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Vimos que si f es holomorfa al rededor del 0 con radio de convergencia $R > \|x\|$, entonces se puede definir $f(x)$ con la serie de MacLaurin que define a f.

Idea

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Vimos que si f es holomorfa al rededor del 0 con radio de convergencia $R > \|x\|$, entonces se puede definir $f(x)$ con la serie de MacLaurin que define a f. Podemos llegar más lejos y definir para f holomorfa al rededor de $\sigma(x)$. Para ello es necesario extender ciertos resultados de Variable Compleja para funciones que toman valores en espacios de Banach.

Contenido

Integral de Linea

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $G \subset \mathbb{C}$ un abierto.

Integral de Linea

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $G \subset \mathbb{C}$ un abierto.

Definición

Sea $f : G \to \mathcal{X}$ una función continua y $\gamma : [a,b] \to G$ una curva rectificable. Definimos **la integral de linea** de f sobre γ como

$$\oint_\gamma f := \oint_\gamma f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)] f(\gamma(t_k))$$

con $\{t_1, \cdots, t_n\}$ una partición uniforme de $[a,b]$.

Integral de Linea

Proposición

Sea $f : G \to \mathcal{X}$ una función continua y $\gamma : [a, b] \to G$ una curva rectificable, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{X}^*$ se tiene que

$$\varphi\left(\oint_\gamma f(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda\right) = \oint_\gamma \varphi(f(\lambda))\ \mathrm{d}\lambda$$

donde la integral de la derecha es la integral usual de linea para funciones complejo valuadas.

Holomorfía Fuerte: $H(G, \mathcal{X})$

Definición

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : G \to \mathcal{X}$. Decimos que f es **una función fuertemente holomorfa** si para cualquier $\lambda \in G$ existe un $x_\lambda \in \mathcal{X}$ tal que

$$\left\| \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} - x_\lambda \right\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Definimos la función $f' : G \to \mathcal{X}$ como $f'(\lambda) := x_\lambda$, la cual se llama la derivada de f. Al conjunto de todas las funciones fuertemente holomorfas de G a $\mathcal{X}$, lo denotamos por $H(G, \mathcal{X})$.

Holomorfía Débil

Definición

Si $f : G \to \mathcal{X}$ es un función tal que para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$ la función $(\varphi \circ f) : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa, decimos que f es **débilmente holomorfa**

Fuerte $\Longleftrightarrow$ Débil

$(\Longrightarrow)$

Proposición

Sea $f : G \to \mathcal{X}$ fuertemente holomorfa, entonces para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$ la función $(\varphi \circ f) : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa y más aún $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$.

Fuerte $\iff$ Débil

$(\Longrightarrow)$

Proposición

Sea $f : G \to \mathcal{X}$ *fuertemente holomorfa, entonces para todo* $\varphi \in \mathcal{X}^*$ *la función* $(\varphi \circ f) : G \to \mathbb{C}$ *es holomorfa y más aún* $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$.

$(\Longleftarrow)$

Teorema

Si $f : G \to \mathcal{X}$ *es débilmente holomorfa, entonces* $f \in H(G, \mathcal{X})$.

Teoremas de Cauchy

Fórmula de Cauchy

Teorema

Sea $f \in H(G, \mathcal{X})$ *y* $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, *una colección de curvas cerradas rectificables tal que cada* $\gamma_k([a,b]) \subset G$ *e* $\mathrm{Ind}_\Gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. *Entonces*

$$\oint_\Gamma f = 0$$

Teoremas de Cauchy

Fórmula Integral de Cauchy

Teorema

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $f \in H(G, \mathcal{X})$ y γ una curva cerrada rectificable con $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. Entonces para cualquier $\lambda_0 \in G$ y cualquier $k = 0, 1, 2, \cdots$ se tiene que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) \cdot f^{(k)}(\lambda_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \mathrm{d}\lambda$$

Contenido

Colección de curvas que encierran un compacto

Teorema

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $K \subset G$ compacto. Entonces existe una colección de curvas $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, con cada $\gamma_k([a,b]) \subset G \setminus K$, tal que

$$K \subset \operatorname{int}(\Gamma) \quad \& \quad \mathbb{C} \setminus G \subset \operatorname{ext}(\Gamma).$$

Más aún, cada curva $\gamma_k \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$.

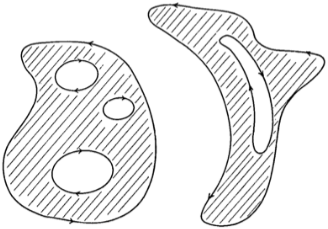
Colección de curvas que encierran un compacto

Teorema

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $K \subset G$ compacto. Entonces existe una colección de curvas $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, con cada $\gamma_k([a,b]) \subset G \setminus K$, tal que

$$K \subset \operatorname{int}(\Gamma) \quad \& \quad \mathbb{C} \setminus G \subset \operatorname{ext}(\Gamma).$$

Más aún, cada curva $\gamma_k \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$.



Definición de $f(x)$

Consideremos $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad, $x \in \mathcal{A}$, y $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$,

Definición

Para cada $f \in H(G, \mathbb{C})$ definimos

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

donde Γ es la colección de curvas dada por el Teorema anterior, para $K = \sigma(x)$.

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ está bien definida:

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ está bien definida:

Proposición

Sea $f \in H(G,\mathbb{C})$. *Si* $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ *y* $\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$ *son dos colecciones de curvas cerradas rectificables y positivamente orientadas que cumplen que* $\sigma(x) \subset \mathrm{int}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus G \subset \mathrm{ext}(\Gamma)$ *y* $\sigma(x) \subset \mathrm{int}(\Delta), \mathbb{C} \setminus G \subset \mathrm{ext}(\Delta)$, *entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Delta f(\lambda)(\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

- La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G, \mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

- La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G, \mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.
- Si $f(\lambda) \equiv 1$, entonces $f(x) = \mathbf{1}$.

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

- La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G, \mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.
- Si $f(\lambda) \equiv 1$, entonces $f(x) = \mathbf{1}$.
- Si $\imath : G \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión canónica, entonces $\imath(x) = x$.

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

- La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G, \mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.
- Si $f(\lambda) \equiv 1$, entonces $f(x) = \mathbf{1}$.
- Si $\imath : G \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión canónica, entonces $\imath(x) = x$.
- Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset H(G, \mathbb{C})$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces $\|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional

Se tiene que $f \mapsto f(x)$ es un cálculo funcional:

- La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G, \mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.
- Si $f(\lambda) \equiv 1$, entonces $f(x) = \mathbf{1}$.
- Si $\imath : G \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión canónica, entonces $\imath(x) = x$.
- Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset H(G, \mathbb{C})$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces $\|f_n(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $f : G \to \mathbb{C}$ tiene expansión en serie de potencias $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$, con radio de convergencia $R > \|x\|$, entonces $f \in H(G, \mathbb{C})$ y

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathcal{A}.$$

Propiedades del cálculo funcional holomorfo

- Es una extensión del C.F. polinomial y del C.F. entero

Propiedades del cálculo funcional holomorfo

- Es una extensión del C.F. polinomial y del C.F. entero
- Es único

Propiedades del cálculo funcional holomorfo

- Es una extensión del C.F. polinomial y del C.F. entero
- Es único
- $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$

Propiedades del cálculo funcional holomorfo

- Es una extensión del C.F. polinomial y del C.F. entero
- Es único
- $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$
- Si $g \in H(G', \mathbb{C})$, donde G' es una vecindad abierta de $f(\sigma(x))$ elegida de tal forma que $(g \circ f) \in H(G \cap f^{-1}(G'), \mathbb{C})$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Aplicación

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$ de tal forma que $\sigma(x) = K_1 \cup K_2$ con K_1, K_2 compactos, no vacíos y disjuntos. Entonces existe un $e \in \mathcal{A}$ tal que

(1) *Es un elemento idempotente, i.e. $e^2 = e$.*

(2) *Si $y \in \mathcal{A}$ tal que $xy = yx$, entonces $ey = ye$.*

(3) *Si $x_1 := xe$ y $x_2 := x(\mathbf{1} - e)$, entonces $x = x_1 + x_2$ y $x_1 x_2 = 0 = x_2 x_1$.*

(4) *Para $j = 1, 2$, $\sigma(x_j) = K_j \cup \{0\}$*

(5) *Se tiene que $e \neq 0$ y $e \neq \mathbf{1}$.*

Aplicación

Demostración.

(Idea:) Sean G_1, G_2 dos subconjuntos disjuntos y abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $K_1 \subset G_1$ y $K_2 \subset G_2$. Definamos $f : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ como

$$f(\lambda) := \chi_{G_1}(\lambda)$$

Se tiene que $f \in H(G_1 \cup G_2, \mathbb{C})$, ya que G_1 y G_2 son disjuntos. Se verifica que el elemento buscado es

$$e := f(x).$$

∎

FIN

¡Muchas Gracias!